



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**Desarrollo y Optimización de Un Generador de
Mallas Superficiales y/o Volumétricas para
Aplicaciones de Simulación Electromagnética**

D. Javier Moreno Garrido

TESIS DOCTORAL

Alcalá de Henares 2013



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Tesis Doctoral

**DESARROLLO Y OPTIMIZACIÓN DE UN GENERADOR DE MALLAS
SUPERFICIALES Y/O VOLUMÉTRICAS PARA APLICACIONES DE
SIMULACIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

Autor:

D. Javier Moreno Garrido

Directores:

Dr. D. Iván González Diego

Dr. D. Manuel Felipe Cátedra Pérez

2013

Dña. Teresa Inmaculada Díez Folledo, Profesora Titular de Universidad del Área de Ciencias de la Computación, en calidad de Directora del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá,

HACE CONSTAR:

Que la tesis titulada **“Desarrollo y Optimización de Un Generador de Mallas Superficiales y/o Volumétricas para Aplicaciones de Simulación Electromagnética”**, presentada por D. Javier Moreno Garrido para optar al título de Doctor por la Universidad de Alcalá, y dirigida por D. Iván González Diego y por D. Manuel Felipe Cátedra Pérez, reúne los requisitos para su presentación y defensa pública.

Y para que así conste, firma la presente en Alcalá de Henares, a 13 de Diciembre de 2012.

La Directora del Departamento de Ciencias de la Computación

Dña. Teresa Inmaculada Díez Folledo



**Universidad
de Alcalá**

D. Iván González Diego, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá.

D. Manuel Felipe Cátedra Pérez, Catedrático de Universidad del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Alcalá.

HACEN CONSTAR:

Que, una vez concluido el trabajo de tesis doctoral titulado: **“Desarrollo y Optimización de Un Generador de Mallas Superficiales y/o Volumétricas para Aplicaciones de Simulación Electromagnética”** realizado por D. Javier Moreno Garrido, dicho trabajo tiene suficientes méritos teóricos, que se han contrastado adecuadamente mediante validaciones experimentales y que son altamente novedosos. Por todo ello consideran que procede su defensa pública.

Y para que así conste, firman la presente en Alcalá de Henares, a 13 de Diciembre de 2012.

El Director de la Tesis

El Codirector de la Tesis

D. Iván González Diego

D. Manuel Felipe Cátedra Pérez



Universidad
de Alcalá



Universidad
de Alcalá

At mi familia

AGRADECIMIENTOS

Con este trabajo, quiero agradecer a todas las personas que me han ayudado, guiado y apoyado a lo largo de mis estudios y carrera, y en general, de mi vida.

En primer lugar, tengo que darle las gracias a Felipe Cátedra por haberme dado la oportunidad de incorporarme al grupo de investigación de Electromagnetismo Computacional de la Universidad de Alcalá. Por otra parte, también tengo que agradecerle todos los consejos e ideas que han hecho posible la continua evolución de esta tesis, así como la dedicación, paciencia y entrega mostradas en todo momento. Sin su ayuda, nada de esto habría sido posible.

Un buen ambiente es fundamental para todo, y en proyectos como este que requieren de varios años para salir adelante, la influencia del entorno lo es más todavía. Por eso, quiero agradecer a todos mis compañeros, tanto a los que continúan como a los que han emprendido otro camino, por hacerme más fácil cada día, por ayudarme siempre que lo he necesitado, y por aguantarme cuando no lo he merecido tanto.

También quiero agradecer al departamento de antenas del CNES-CST (Centre National d'Études Spatiales – Centre Spatial de Toulouse) el haberme acogido durante mi estancia en Toulouse, y a los compañeros que coincidieron conmigo allí y que tanto me ayudaron a integrarme en el idioma y a disfrutar del día a día.

Para terminar con el ámbito de trabajo, he tratado de guardarme mis mejores palabras para quien empezó este trabajo, pero aun así no es suficiente para agradecerse como se merece. Al padre de mi trabajo, y al padre de todos en el grupo de investigación, al “oráculo”, Iván González, que siempre está dispuesto a perder su tiempo para solucionar nuestros problemas, para darnos un punto de vista más sabio y que tanto nos enseña y ayuda a mejorar día a día. Personalmente, le debo tanto por haberme permitido continuar con un proyecto que empezó él, con la paciencia suficiente para enseñarme todo cuanto sabía y darme un tirón de orejas cuando me lo he buscado, siempre con la mejor intención y una sonrisa en la cara.

Y cambiando de ámbito, la importancia de mi familia siempre ha sido clave en todos mis progresos, porque ellos son quienes han estado en todos los momentos felices, y más aún en los no tan felices. Porque no sería lo que soy y como soy sin todo lo que me han ido aportando. Gracias a mis tíos, especialmente a José, Toñi y Dori. También me acuerdo de mis primos, primas y amigos que siempre me han hecho pasar tan buenos momentos. Por supuesto, gracias a mis abuelos por haberme ayudado tantísimo, especialmente al gran abuelo que dejó una huella tan profunda e imposible de borrar.

Los agradecimientos quizás más breves en palabras, pero más completos en sentimientos, como no podía ser de otra forma, son para mis padres, Carmen y Miguel Ángel, y para mi hermano, Miguel Ángel. Ellos son los que tantas hazañas han sufrido, y tienen un mérito inmensurable por haber sabido gestionar siempre a esta fábrica de malas ideas. Gracias por haberme marcado siempre el mejor camino, por haber hecho tantos esfuerzos para que pudiera crecer en todos los aspectos, por haberme animado a mejorar minuto a minuto, y por todas las buenas acciones e intenciones que harían necesaria una tesis entera para desglosar. Gracias por darme siempre lo mejor de vosotros mismos y todo cuanto os ha sido posible,... y mucho más.

Por último, gracias a Vanesa por haber aguantado tanto tiempo en la distancia y por haberme apoyado en todo momento. Una relación así es muy difícil de llevar, y siempre ha tenido buenas palabras y sonrisas para seguir adelante y hacer que mereciera la pena... Ahora comienza una nueva etapa incluso mejor que la anterior. Muchas gracias por hacerme todos los días más fáciles y felices, por darme siempre lo mejor de ti, y por ser la causa de los mejores momentos de los últimos años.

A todos, mis más profundos agradecimientos.

RESUMEN

En esta tesis, se estudia el problema de la discretización de modelos geométricos complejos mediante elementos de formas simples y tamaños homogéneos, conocido como mallado, y que resulta necesario en múltiples aplicaciones software. El renderizado de los modelos geométricos es un ejemplo orientado a la visualización gráfica, en el que se aproximan objetos arbitrarios mediante formas básicas para facilitar la representación con nuevos objetos de la misma apariencia que los originales. Otra aplicación, y en la que se ha enfocado este trabajo, es el análisis de modelos geométricos con técnicas numéricas que necesitan simplificar las geometrías originales con elementos de características específicas para garantizar resultados fiables, como pueden ser análisis térmicos, dinámica de fluidos, etc.

El objetivo de este trabajo es el mallado orientado a la simulación con métodos de análisis electromagnético, concretamente, el Método de los Momentos y la Óptica Física, utilizada para el cálculo del campo radiado por cualquier objeto complejo. Para ello, se ha desarrollado un algoritmo de generación de mallas superficiales que descompone los modelos geométricos en elementos cuadrangulares y triangulares conformados a los cuerpos originales, con una resolución de mallado que depende de la longitud de onda de análisis. Con este método, se garantiza una discretización robusta y fiable del modelo geométrico original. También se presenta un algoritmo de mallado volumétrico para discretizar objetos cerrados con hexaedros homogéneos, con el objetivo de modelar objetos volumétricos dieléctricos.

Para poder trabajar con formas arbitrarias, se ha utilizado el modelado mediante superficies paramétricas no racionales (NURBS), ya que permite un alto nivel de detalle con una formulación matemática relativamente sencilla y bastante robusta. Aunque la mayoría de herramientas de Modelado Geométrico Asistido por Ordenador utilizan superficies paramétricas, hay algunas que solo trabajan con mallas de puntos de paso. Con el objetivo de maximizar la interoperabilidad de los métodos de mallado, se propone un algoritmo de interpolación que permite convertir mallas de puntos de paso a curvas o superficies paramétricas.

La generación de mallas es un proceso costoso en términos de recursos de CPU, por lo que los métodos presentados en esta tesis han sido paralelizados. Además, se presenta una

nueva técnica de optimización del proceso de mallado superficial, que consiste en la generación multinivel de las mallas, y que permite reducir notablemente los recursos del mallado. También se exponen técnicas de preprocesado de los modelos geométricos y de postprocesado de las mallas, que garantizan que las mallas finales cumplan todos los requisitos impuestos por los núcleos de análisis electromagnético con las mejores prestaciones posibles.

Para verificar todos los métodos propuestos en esta tesis, se recopila una colección de simulaciones en las que se comparan los resultados de simular las mallas superficiales obtenidas con el algoritmo desarrollado, frente a otras generadas con herramientas de mallado comerciales. También se analizan los tiempos del proceso de mallado resultantes al utilizar o no las técnicas de aceleración propuestas en este trabajo.

ABSTRACT

In this thesis, the problem of discretization of geometric complex models by means of simple shapes and homogeneous sizes elements is studied, better known as meshing, and that is necessary in multiple software applications. Geometric models rendering is an example aimed at graphic visualization, in which arbitrary objects are approximated by means of basic shapes to facilitate the representation with new objects with the same appearance that the original ones. Another application, in which this project has been really focused, is the analysis of geometric models with numerical techniques that require simplifying the original geometries with elements of specific characteristics to ensure reliable results, such as thermal analysis, fluid dynamics, etc.

The aim of this project is the meshing simulation-oriented with electromagnetic analysis methods, in particular, the *Method of Moments* and the *Physical Optics*, applied to the calculation of the scattered field of any complex object. To do that, a superficial meshing algorithm has been implemented which breaks the geometric models down into quadrangular or triangular body-fitted elements, with a resolution mesh that depends on the wavelength analysis. With this method, a robust and reliable original geometric model discretization is guaranteed. A volumetric meshing algorithm to break closed objects down into homogeneous hexahedrons is also shown, with the aim of modelling dielectric volumetric objects.

To be able to work with arbitrary shapes, the non-rational parametric surfaces (NURBS) modelling has been used, as this provides a high level detail with a relatively simple and robust mathematical formulation. Although most of *Computer Aided Geometric Designs* tools use parametric surfaces, there are some tools that only work with grid of points on curves or surfaces. With the aim of maximizing the interoperability of the meshing methods, an interpolation algorithm that permits to convert grid points to parametric curves or surfaces is proposed.

Mesh generation is a heavy process in terms of CPU resources, so the methods proposed in this thesis have been parallelized. Furthermore, a new optimization technique of the superficial meshing process is presented, that consists in a multilevel mesh generation, and allows reducing widely the meshing resources. Additional preprocessing and postprocessing

techniques of the input geometric models and output meshes are also presented, respectively, that guarantee that the final meshes achieve all requirements imposed by the electromagnetic analysis kernels with the best features.

To verify all methods proposed in this thesis, a simulation collection is gathered, in which results of simulating some superficial meshes obtained with the developed algorithm are compared to other ones generated with commercial meshing tools. Meshing times are also analysed when the speeding up techniques proposed in this project are used or not.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS.....	1
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.3. ANTECEDENTES HISTÓRICOS	5
1.3.1. Algoritmos de mallado	5
1.3.1.1. Mallado superficial.....	5
1.3.1.2. Mallado volumétrico.....	7
1.3.2. Herramientas disponibles.....	9
1.3.2.1. Comerciales.....	9
1.3.2.1.1. GiD	9
1.3.2.1.2. CUBIT	10
1.3.2.1.3. Hypermesh	11
1.3.2.2. Libres.....	12
1.3.2.2.1. Gmsh	12
1.3.2.2.2. Salome	12
1.4. JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS EMPLEADAS	13
1.5. ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	14
1.6. REFERENCIAS	15
 2. MODELADO GEOMÉTRICO	19
2.1. INTRODUCCIÓN	19
2.2. MODELOS MATEMÁTICOS MÁS COMUNES	22
2.2.1. Curvas de Bézier	22
2.2.2. Curvas de Bézier racionales.....	23
2.2.3. Superficies de Bézier racionales	24
2.2.4. Curvas B-Spline	26

2.2.5.	Curvas B-Spline racionales	27
2.2.6.	Superficies B-Spline racionales.....	27
2.3.	SUPERFICIES NURBS	30
2.3.1.	Interpolación Global.....	31
2.3.1.1.	Interpolación Global de una curva	31
2.3.1.2.	Interpolación Global de una superficie	34
2.3.2.	Curvas Recortadoras y Superficies Recortadas	39
2.4.	FORMATOS GRÁFICOS.....	41
2.4.1.	Formato de puntos sobre superficies: DXF	42
2.4.2.	Formato de superficies paramétricas: IGES	44
2.5.	TRATAMIENTO DE LA GEOMETRÍA	46
2.5.1.	Método de los Momentos.....	47
2.5.1.1.	Descripción	47
2.5.1.2.	Criterios de mallado	49
2.5.2.	Óptica Física aplicada al cálculo de la Sección Radar	51
2.5.2.1.	Óptica Física	51
2.5.2.2.	Sección Radar	52
2.5.2.3.	Criterios de mallado	54
2.6.	REFERENCIAS.....	57
3.	ALGORITMOS DE MALLADO DESARROLLADOS	59
3.1.	INTRODUCCIÓN.....	59
3.2.	ALGORITMO DE MALLADO SUPERFICIAL.....	60
3.2.1.	Algoritmo de paving	64
3.2.1.1.	Visión general del algoritmo	64
3.2.1.2.	Clasificación de los nodos según su ángulo.....	70
3.2.1.3.	Selección de fila inicial.....	73
3.2.1.4.	Generación de filas.....	74
3.2.1.4.1.	Proyección desde nodo lateral	75
3.2.1.4.2.	Proyección inicial si sólo hay nodos laterales	76

3.2.1.4.3.	Proyección desde nodo esquina	77
3.2.1.4.4.	Proyección desde nodo reverso.....	78
3.2.1.4.5.	Generación de elemento desde nodo final	79
3.2.1.5.	Intersección de fronteras	81
3.2.1.5.1.	Factor de proximidad.....	83
3.2.1.5.2.	Espacio adherente	83
3.2.1.5.3.	Distancias mínimas	84
3.2.1.5.4.	Ecuación de proximidad.....	85
3.2.1.6.	Suavizado.....	86
3.2.1.6.1.	Suavizado de los nodos de mallado	87
3.2.1.6.2.	Suavizado de los nodos interiores	89
3.2.1.7.	Cosido.....	90
3.2.1.7.1.	Cosido de nodos interiores	90
3.2.1.7.2.	Cosido de nodos fijos	91
3.2.1.7.3.	Cosido de transiciones	92
3.2.1.8.	Ajuste de filas	92
3.2.1.9.	Comprobación del cierre.....	94
3.2.1.10.	La fábrica de elementos	95
3.2.1.11.	Mejora del mallado final	96
3.2.2.	Técnicas adicionales	97
3.2.2.1.	Inserción de triángulos.....	98
3.2.2.2.	Generación inicial de elementos alternativa en nodos esquina	100
3.2.2.3.	Nuevos patrones de cierre	101
3.2.2.4.	Nuevo ajuste de filas	102
3.2.2.4.1.	Ajustar fila	102
3.2.2.4.2.	Aumentar frontera.....	103
3.2.2.4.3.	Ajustar frontera.....	104
3.2.2.5.	Inserción de puntos de control	105
3.2.3.	Estructura final del algoritmo de mallado implementado	107
3.3.	APROXIMACIÓN VOLUMÉTRICA DE DIELECTRICOS DE CAPA FINA.....	108

3.4.	MALLADO VOLUMÉTRICO	109
3.4.1.	Algoritmo de cubicado	110
3.4.1.1.	Visión en 2D del algoritmo	111
3.4.1.2.	Generación de la rejilla estructurada	112
3.4.1.3.	Clasificación de puntos.....	112
3.4.1.4.	Generación de cubos.....	116
3.4.1.5.	Aproximación de la forma del volumen	117
3.4.1.6.	Aproximación interior de la forma del volumen	117
3.4.1.7.	Estructura final del algoritmo de cubicado	119
3.4.2.	Algoritmo de unión con la corteza	119
3.4.2.1.	Cálculo de direcciones de proyección	120
3.4.2.2.	Puntos de corte con la corteza	122
3.4.2.3.	Generación de elementos de unión	123
3.5.	REFERENCIAS	125
4.	OPTIMIZACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE MALLADO	127
4.1.	INTRODUCCIÓN	127
4.2.	ETAPAS DE PRE-PROCESADO	127
4.2.1.	Detección de topologías.....	129
4.2.1.1.	Remodelado de continuidad	132
4.2.1.2.	Detección final.....	133
4.2.2.	Emplazamiento de antenas en estructuras.....	133
4.2.3.	Mallado de circuitos impresos	135
4.2.3.1.	Detección de circuitos	135
4.2.3.2.	Modelado de bordes	137
4.3.	ETAPAS DE POST-PROCESADO.....	140
4.3.1.	Cálculo de estadísticas	140
4.3.2.	Aproximación volumétrica de capa fina.....	145
4.3.3.	Rotación de la malla	148
4.3.4.	Evaluación de la calidad de la malla	151

4.4.	OPTIMIZACIÓN DE VELOCIDAD	155
4.4.1.	Mallado superficial	155
4.4.1.1.	Paralelización.....	156
4.4.1.2.	Modo multinivel	157
4.4.2.	Mallado volumétrico	161
4.4.2.1.	Paralelización.....	161
4.5.	REFERENCIAS	164
5.	RESULTADOS.....	167
5.1.	INTRODUCCIÓN	167
5.2.	PLACA PLANA CUADRADA	168
5.2.1.	Análisis de tiempos de mallado.....	168
5.3.	AEROGENERADOR	170
5.3.1.	Análisis de tiempos de mallado.....	171
5.4.	CONO ESFERA TRUNCADA.....	172
5.4.1.	Mallados	172
5.4.2.	Verificación de la malla	173
5.5.	CONO ESFERA CON RANURA	174
5.5.1.	Mallados	174
5.5.2.	Verificación de la malla	175
5.6.	REFLECTOR CON BOCINA.....	177
5.6.1.	Mallados	177
5.6.2.	Resultados	178
5.6.3.	Comparativa de resultados	179
5.7.	PATRULLERA	181
5.7.1.	Mallados	181
5.7.2.	Resultados	182
5.7.3.	Comparativa de resultados	183
5.8.	AVIONETA.....	184
5.8.1.	Mallados	184

5.8.2.	Resultados	185
5.8.3.	Comparativa de resultados	187
5.9.	ESFERA.....	187
5.9.1.	Mallados obtenidos.....	188
5.9.2.	Comparativa de resultados	189
5.10.	FILTRO HAIRPIN	190
5.11.	ANTENA DE HÉLICE CUADRIFILAR.....	192
5.12.	ANTENA BLADE.....	194
5.13.	VEHÍCULO	197
5.13.1.	Análisis de tiempos de mallado.....	198
5.13.2.	Estadísticas de la geometría.....	199
5.13.3.	Análisis de antena embarcada	202
5.14.	REFERENCIAS.....	204
6.	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO	207
6.1.	CONCLUSIONES	207
6.2.	FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO	208
7.	THESIS CONCLUSIONS AND SUGGESTIONS FOR FUTURE RESEARCH	211
7.1.	THESIS CONCLUSIONS	211
7.2.	SUGGESTIONS FOR FUTURE RESEARCH.....	212

1. INTRODUCCIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS

El diseño y análisis electromagnético de objetos con formas arbitrarias, así como el estudio de la propagación de señales en entornos reales o la interferencia entre sistemas radiantes, se realiza a través de simulaciones en ordenadores que permiten optimizar los sistemas antes de fabricarlos, reduciendo así tanto los costes como los tiempos requeridos para desarrollar el mismo trabajo sirviéndose únicamente de medidas.

A la hora de simular, hay una gran variedad de técnicas electromagnéticas para analizar los sistemas, como el Método de los Momentos (*Method of Moments* - MoM), la Óptica Física (*Physical Optics* - PO), o la Teoría Geométrica de la Difracción (*Geometrical Theory of Diffraction* - GTD), cuya elección de una u otra depende principalmente del tamaño eléctrico (en términos de la longitud de onda) del objeto y sus detalles, además de los requisitos de precisión en los resultados, que a veces hacen obligatorio recurrir a técnicas rigurosas y otras permiten obtener una aproximación mediante técnicas asintóticas. [1]

Independientemente del algoritmo de simulación empleado, el usuario trabaja siempre con el mismo modelo geométrico, y es la herramienta de simulación la que se encarga de aplicar un tratamiento u otro a la geometría para que el análisis sea correcto. Por lo general, el paso para convertir el modelo geométrico a una entrada válida para aplicarle el algoritmo de simulación electromagnética consiste en la discretización de la geometría en formas sencillas, mediante el proceso conocido como mallado. Los criterios de mallado son muy diversos, pudiendo variar tanto las formas como las dimensiones de los elementos que componen las mallas.

Tanto el modelado geométrico como el mallado del mismo juegan un papel igual o más importante que las propias técnicas numéricas empleadas para obtener resultados aceptables, ya que los modelos malos suelen causar problemas importantes de convergencia o resultados imprecisos.

Actualmente hay disponibles muchas herramientas de mallado, pero presentan una serie de inconvenientes: el coste elevado de sus licencias para el caso de las comerciales, la incompatibilidad entre los formatos de entrada o de salida que admiten, las limitaciones que imponen sus criterios de mallado, el soporte, etc.

En la presente tesis, se pretende desarrollar una técnica para mallar geometrías compuestas por superficies paramétricas NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*) [2], con el objetivo de poder analizar las mallas generadas mediante núcleos de cálculo electromagnético, principalmente basados en el MoM, GTD y PO, ya validados mediante una amplia colección de trabajos [3], [4], [5]. Así pues, las características de mallado se deben adaptar adecuadamente a los requisitos impuestos por cada núcleo de simulación para así optimizar su convergencia y calidad de resultados.

El objetivo principal es el desarrollo de un mallador para discretizar los modelos geométricos mediante elementos conductores superficiales (sin espesor), que pueden ser curvos o planos. Además conviene optimizar la herramienta, tanto para minimizar los tiempos de mallado como para que sea capaz de hacer ciertos pre-procesados sobre el modelo geométrico o post-procesados de la malla de salida, como por ejemplo, la detección automática de continuidad entre las superficies de entrada o la limpieza de partes solapadas en la malla de salida.

La mayoría de malladores disponibles encontrados contienen una serie de inconvenientes que se pretenden resolver en el presente trabajo:

- Generación de mallas planares. Están compuestas de elementos planos que discretizan los detalles de la geometría de entrada cuando hay formas curvas. La solución propuesta sustituye los elementos planos por mallas de puntos contenidos en las superficies originales de la geometría que permiten representar los detalles de la misma con un número de elementos considerablemente menor.
- Mallas de elementos triangulares. A pesar de que los algoritmos de mallado que trabajan con elementos triangulares son más sencillos, el número de elementos en las mallas generadas suele ser demasiado alto, por lo que se opta por una técnica de mallado con elementos cuadrangulares para conseguir idénticos resultados con aproximadamente la mitad de elementos que las mallas de triángulos.

- Capacidad para trabajar con formas arbitrarias. Un problema importante encontrado en las herramientas utilizadas es la inestabilidad en el mallado de formas no canónicas, como pueden ser superficies cerradas o recortadas [6]. Para conseguir un algoritmo robusto que trabaje con cualquier tipo de formas geométricas, se tratarán de optimizar las características de las superficies de entrada en un paso previo al mallado y se implementarán técnicas adicionales de generación de elementos que controlen la calidad de la malla.
- Eficiencia de la herramienta. La paralelización es un requisito imprescindible en un mallador destinado a técnicas electromagnéticas, ya que el número de elementos a generar puede ser muy alto y, consecuentemente, esto ralentizaría el mallado o incluso desbordaría la memoria y capacidad de cálculo disponible en un único procesador. Es muy importante garantizar la continuidad de la malla generada al paralelizar la herramienta, lo que hace particularmente complicada esta tarea [7].

Además de la versión superficial, se desea desarrollar una versión plenamente volumétrica para objetos dieléctricos, en la que los elementos que formen la malla si que tengan espesor, y otra híbrida que sirva para aproximar las geometrías cerradas como una sucesión de capas superficiales paralelas, de tal manera que la separación entre capas adyacentes sea equivalente al espesor que tendría el mallado volumétrico puro. Mediante estas tres aproximaciones se podría hacer un análisis electromagnético de cualquier escenario formado por diversos objetos de formas y materiales diferentes.

En las operaciones de pre-procesado y post-procesado, y en los propios algoritmos de mallado es necesario emplear técnicas de aceleración que optimicen su eficiencia. Por ejemplo, muchas de las evaluaciones necesarias para mallar, como la detección de topologías o la clasificación de puntos interiores o exteriores a los objetos cerrados de la geometría, están basadas en la búsqueda de puntos sobre las superficies del modelo geométrico, por lo que se recomienda hacer una preselección de las superficies candidatas con alta probabilidad de éxito para evitar comprobaciones innecesarias.

Otros de los problemas a resolver es la alimentación de antenas de forma automática, para forzar que haya continuidad en las corrientes entre las superficies que forman las antenas y las estructuras sobre las que se montan. También se desea hacer una detección automática de circuitos impresos que permita pasar de una serie de superficies conectadas entre si a la forma real de los circuitos en una única pista aislada.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta tesis se pretende resolver el problema de la discretización de modelos geométricos compuestos por superficies de formas arbitrarias y complejas, como pueden ser satélites, aviones, barcos, reflectarrays, etc., mediante elementos de formas simples (cuadrados y/o triángulos para el caso superficial, o hexaedros en el volumétrico) cuyas dimensiones dependan en la mayoría de casos de la longitud de onda de análisis. Para ello, es necesario hacer una revisión del estado del arte actual que permita conocer las técnicas de mallado tradicionalmente empleadas y diseñar una que se adapte a las necesidades de los métodos numéricos de cálculo electromagnético con los que se analizarán las mallas generadas. La nueva técnica puede ser una combinación de las existentes, y debe ser capaz de realizar mallados superficiales y volumétricos.

Hay que aclarar, que aunque el mallado superficial es aplicable sobre cualquier geometría, el mallado volumétrico únicamente se puede emplear sobre objetos completamente cerrados del modelo geométrico, que a su vez pueden estar compuestos por una o varias superficies conectadas entre sí.

Los pasos a seguir para realizar el mallado de cualquier modelo geométrico con el algoritmo propuesto en esta tesis son los siguientes:

1. Carga de las superficies que componen la geometría como superficies paramétricas, independientemente de cómo vengan definidas en el modelo geométrico de entrada.
2. Detección de continuidad entre las superficies que componen la geometría, estudiando las curvas de las superficies en contacto. Este paso es opcional, pero por lo general conviene usarlo en la mayoría de casos.
3. Definición del criterio de mallado deseado. Hay que especificar el tamaño deseado de lado de elementos para cada superficie u objeto que compone la geometría, así como si se trata de mallado superficial o volumétrico.
4. Mallar las superficies u objetos que componen la geometría con el criterio seleccionado, evaluando la calidad de la malla final en caso de que sea necesario y generar los ficheros de salida en el formato requerido por los núcleos de simulación.

1.3. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En esta sección se presenta un resumen de las principales técnicas de mallado desarrolladas a lo largo de los años y que han servido como base de numerosos trabajos. También se enumeran las principales herramientas de mallado disponibles actualmente.

1.3.1. Algoritmos de mallado

1.3.1.1. Mallado superficial

La mayoría de algoritmos de cálculo electromagnético, como el Método de los Momentos [8], [9] o el Método de Elementos Finitos [10], [11] requieren la generación de una malla basada en una apropiada distribución de densidad de elementos, en la que el tamaño de los mismos depende generalmente de la longitud de onda de análisis, para que el análisis numérico de la misma proporcione resultados válidos con un coste computacional admisible.

Tradicionalmente se ha clasificado la generación de mallas superficiales en dos tipos, distinguiendo entre mallas estructuradas, y no estructuradas. [12]

Las mallas estructuradas se caracterizan por tener una estructura bien definida. En una situación ideal, todos los nodos (o puntos) que componen una malla estructurada pertenecerán al mismo número de elementos. Esta aproximación resulta muy efectiva cuando la geometría es relativamente simple. Las mallas estructuradas ofrecen un mayor control sobre el tamaño y la forma de los elementos generados, pero por el contrario, su dificultad es demasiado grande cuando se trabaja con cuerpos complejos que pueden ser discretizados sencillamente con mallas no estructuradas.

Sin embargo, cuando se desea mallar formas geométricas arbitrarias conviene utilizar métodos multi-bloque [13]. La generación de mallas multi-bloque es un tipo particular de mallas estructuradas en las que un dominio se subdivide en bloques cuadrilaterales o hexaedros. Estos bloques se subdividen en elementos, hasta conseguir la densidad deseada, pudiendo variar el tamaño de los elementos para cada bloque. La mayor ventaja de esta técnica es que proporciona mallados altamente estructurados. Sin embargo, la mayor dificultad se encuentra a la hora de establecer las conexiones entre los bloques en los que varía el espaciado de los puntos de la malla, especialmente en geometrías complejas. Los

algoritmos empleados generalmente utilizan complejas técnicas de suavizado iterativo para intentar alinear todo lo posible los elementos con las fronteras físicas originales.

La triangulación [14] es la técnica de generación de mallas no estructuradas más utilizada, ya que cualquier geometría arbitraria se puede discretizar con menor dificultad con elementos triangulares que con cuadrangulares. Estas mallas suelen tener un gran número de nodos irregulares, ya que por lo general, no hay una restricción fija sobre el número de elementos que confluyen en un único nodo. Otro inconveniente de este tipo de mallas es que apenas se puede controlar la forma y el tamaño de los elementos. No obstante, los algoritmos de triangulación (o tetrahedrización, para casos volumétricos) tradicionalmente empleados son capaces de descomponer las geometrías en triángulos que satisfacen criterios de calidad adecuados para el método de elementos finitos, como pueden ser restricciones de ángulo mínimo, de área, de altura, etc.

En casos bidimensionales, la generación de puntos interiores en el dominio espacial de la geometría se puede conseguir mediante una descomposición en árbol, bien sea generando triángulos o cuadrángulos. Una primera alternativa es utilizar la triangulación de Delaunay [15], [16] para conectar los puntos interiores generados en el algoritmo de mallado. Otra opción, comúnmente utilizada en aplicaciones reales de ingeniería, es adoptar algoritmos de recuperación de fronteras que aseguran la integridad de la malla en las mismas. Sin embargo, estas técnicas se complican para casos tridimensionales. [17]

También existen técnicas de mallado indirecto para generar cuadriláteros a partir de una malla triangular existente, como puede ser el algoritmo *quad-morphing* [18]. En estos métodos indirectos, los triángulos adyacentes se van combinando sistemáticamente para formar una malla completa de elementos cuadriláteros en la mayoría de los casos. Por una parte, estos métodos son muy rápidos, pero por otra, suelen generar un gran número de nodos irregulares, es decir, nodos interiores en la malla de cuadriláteros que pertenecen a más o menos de cuatro elementos. [19]

Los métodos directos, por el contrario, no necesitan una malla triangular inicial. Los cuadriláteros se generan directamente dentro de las superficies, después de haberlas descompuesto en regiones simples, o empleando algoritmos de generación progresiva de elementos. En la mayoría de los casos, los métodos directos proporcionan mallas de mejor calidad que los indirectos, con un menor número de nodos irregulares.

Los métodos de superposición-deformación de retícula se basan en la generación de una malla inicial que contiene en su interior toda la región a mallar, para posteriormente eliminar los elementos que caen fuera de la verdadera geometría y resolver aquellos que caen parcialmente dentro o muy próximos a los contornos que delimitan la geometría. Uno de los algoritmos de este tipo más conocidos es el *quadtree*, capaz de adaptar el tamaño de los elementos generados para modelar correctamente los detalles de la geometría de entrada. [20], [21]

De los métodos directos de generación de elementos cuadrilaterales, el algoritmo de *paving* o enladrillado suele proporcionar mallas de alta calidad para las aplicaciones electromagnéticas. Se trata de una técnica de generación progresiva de elementos, y la idea principal es que los contornos de la malla suelen seguir a los contornos originales de las superficies, ya que los elementos se insertan desde estos. Esta característica es de gran importancia, ya que es deseable que los elementos de mayor calidad se encuentren próximos a las fronteras que delimitan las superficies. Además, este método proporciona pocos nodos irregulares. Otra característica es que los mallados suelen ser independientes a la rotación o translación de las geometrías de entrada, es decir, la malla resultante de una geometría rotada debe ser equivalente a rotar la malla de la geometría original. [22]

La mayoría de técnicas anteriormente mencionadas generan elementos triangulares o cuadrangulares, siendo los elementos que componen las mallas facetas planas. Una malla compuesta por facetas planas requiere un gran número de elementos para proporcionar resultados aceptables en geometrías arbitrarias no planas, ya que lo que se hace es discretizar la curvatura de las superficies, y por tanto se pierde precisión.

1.3.1.2. Mallado volumétrico

La mayoría de los métodos citados anteriormente tienen su correspondiente versión de mallado volumétrico, aumentando notablemente la complejidad de los algoritmos. El control de las uniones entre los elementos generados y las superficies que delimitan los objetos a mallar, y la detección de colisiones entre elementos, se convierten en los principales problemas a resolver.

Al igual que ocurre en el mallado superficial con los elementos triangulares, los tetraedros son la solución más empleada en la mayoría de algoritmos de mallado volumétrico, debido a su menor complejidad computacional y mayor adaptabilidad sobre formas complejas

con deformaciones de diferentes dimensiones, pero la calidad de las mismas no es adecuada, ya que no son mallas estructuradas. [23], [24], [25]

Una primera alternativa es la generación de mallas estructuradas multi-bloque, que consiste en incluir en los algoritmos de mallado una etapa de preprocesado para dividir los objetos en bloques más sencillos para mallarlos separadamente. Aunque este tipo de técnicas permite generar correctamente mallas estructuradas de cualquier geometría, la descomposición multi-bloque se convierte en una tarea inviable por su elevada complejidad en casos con un alto nivel de detalle, como pueden ser barcos o aviones. [26]

Los métodos de superposición tienen un cierto parecido con la generación multi-bloque, ya que comienzan desde mallas que cubren completamente el volumen, y las adaptan a las formas de los objetos. Un ejemplo es el algoritmo basado en rejillas, que genera una malla estructurada de hexaedros (o cuadrados, en la versión superficial) sobre una región lo suficientemente grande como para contener completamente al objeto de interés, después descarta los elementos exteriores al mismo y finalmente, adapta la malla a los contornos de la geometría. La tarea más compleja es conseguir que la corteza exterior del volumen quede correctamente representada en la malla con elementos de tamaños y formas homogéneas. Otro inconveniente de estos métodos es que la malla de inicio está compuesta por elementos de tamaño constante, y para conseguir una buena calidad en objetos con pequeños detalles, los elementos iniciales deben ser de dimensiones similares a las de los detalles más pequeños del volumen, por lo que el número de elementos de la malla crece considerablemente para representar con una buena calidad objetos grandes y sencillos que contengan algún detalle (o ranura) pequeño [27].

Como solución al problema de la resolución constante de la malla, la extensión del algoritmo adaptativo *quadtree* anteriormente mencionado, conocido como *octree*, permite reducir notablemente el número de elementos en la malla sin perder precisión en los detalles de la geometría. La principal dificultad de este algoritmo es que hay que controlar la continuidad entre los hexaedros que forman la malla. [28], [29]

Por último, también hay que mencionar la versión volumétrica del algoritmo superficial de *paving*, denominada *plastering*, que consiste en una técnica de generación de elementos progresiva desde las fronteras del objeto a mallar. Tanto la detección como la corrección de la intersección de frentes de elementos en el caso de hexaedros presentan una elevada complejidad computacional. Además, las mallas generadas no presentan una clara estructura y

la dificultad del algoritmo se ve notablemente incrementada con la complejidad de las geometrías. [30]

1.3.2. Herramientas disponibles

En esta sección se describen brevemente algunos de los generadores de mallas actualmente disponibles, tanto bajo licencia comercial como libre. Todos ellos poseen diferentes algoritmos de mallado y varias posibilidades en cuanto a las formas de los elementos generados. No obstante, la técnica a desarrollar en este trabajo no pretende competir con el resto de malladores. Lo que realmente se desea conseguir es un método de mallado robusto que sea capaz de trabajar con cualquier tipo de formas geométricas, con criterios de calidad que resulten óptimos para las técnicas de cálculo electromagnético con las que se analizarán las mallas, y que los tiempos de mallado sean despreciables en comparación con los de la simulación.

1.3.2.1. Comerciales

Actualmente son tres los malladores comerciales más utilizados en el ámbito de la ciencia e ingeniería. A continuación se describen las principales características de cada uno de ellos.

1.3.2.1.1. GiD

GiD ha sido desarrollado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (abreviado como CIMNE), un centro de investigación y desarrollo de Barcelona, que trabaja en colaboración con la Universidad Politécnica de Cataluña. Es una herramienta de pre- y post-procesado para simulaciones numéricas enfocadas especialmente al ámbito de ciencia e ingeniería, diseñada para cubrir las necesidades más comunes de estas áreas de trabajo: modelado de geometrías, análisis de datos, generación de mallas, intercambio de datos con herramientas de análisis y visualización de resultados.

Puede trabajar en problemas de sólidos y estructuras mecánicas, dinámica de fluidos, electromagnetismo, transferencia de calor, geo-mecánica, procesos de fabricación industriales, etc. usando elementos finitos, volúmenes finitos, elementos frontera, diferencias finitas, o procedimientos numéricos con o sin mallas [31]. Permite generar toda la información necesaria para el análisis de cualquier problema en ciencia e ingeniería empleando métodos numéricos: mallados, condiciones frontera y de carga, tipos de materiales, visualización de resultados numéricos, etc. Se puede combinar con otras herramientas de cálculo, ya que

puede escribir y leer varios formatos de ficheros que se pueden personalizar para hacerlos compatibles con otro software.

Destaca por tener herramientas de pre-procesado y post-procesado, entre las que se resumen las siguientes funciones:

- Pre-procesado. Las utilidades de esta sección son las típicas de un editor CAD.
 - Posibilidad de trabajar por capas, haciendo más sencilla la clasificación de superficies de las geometrías.
 - Creación de puntos, líneas, superficies y volúmenes.
 - Definición de materiales y condiciones de frontera entre superficies.
 - Generación de mallas.
 - Calcular resultados.
- Post-procesado. Su principal función es la abstracción y comprensión de los resultados obtenidos en cálculos previos.
 - Carga de resultados.
 - Cambiar estilos de mallas.
 - Visualizar resultados: combinados, por superficies, con animación, gráficas, estadísticas, etc.

Puede generar mallas de diversos tipos, distinguiendo dos tipos básicos que son mallas estructuradas y no estructuradas. En el caso particular de volúmenes hay un tipo adicional: mallas semi-estructuradas, que son mallas estructuradas en una dirección (número fijo de divisiones), pero en las que cada división de las mallas no tiene por qué ser estructurada. En función de los métodos de mallado seleccionados, ofrece varios tipos de elementos: lineares, triangulares, cuadrilaterales, circulares, tetraedros, hexaedros, prismas, esferas o puntos.

1.3.2.1.2. CUBIT

Durante varias décadas, *CUBIT* ha sido el foco de un amplio esfuerzo en investigación y desarrollo en la generación de mallas y la preparación de geometrías, en los laboratorios americanos *Sandia National Laboratories*. Más concretamente, el algoritmo de *paving* y la mayoría de mejoras posteriores surgieron de sus investigaciones. Además de su función como suministrador de software, *CUBIT* continua investigando para mejorar y descubrir nuevos algoritmos de mallado, desarrollando nuevas herramientas para limpiar y simplificar geometrías, o aplicaciones específicas para realizar tareas complejas de pre-procesado. [32]

CUBIT es una herramienta de generación de mallas bi- y tri-dimensionales de elementos finitos para modelos sólidos. El principal éxito de esta herramienta es la robusta generación de mallas en geometrías complejas de forma automática, escalable a millones de elementos. Particularmente, *CUBIT* fue la herramienta pionera en el desarrollo de la

generación automática de mallas cuadrilaterales y hexaédricas, pero también incluye métodos robustos para generar mallas de triángulos y tetraedros. Contiene una amplia variedad de técnicas de mallado, con una gran infraestructura y algoritmos para la interoperabilidad.

Se trata de una herramienta para la creación, modificación y mallado de geometrías, similar a una herramienta CAD pero con funcionalidades específicas adaptadas a cálculos y simulaciones sobre las mallas generadas. Las funcionalidades destacadas más importantes son:

- Creación y edición de geometrías. Incluye primitivas geométricas, operaciones booleanas, limpiado automático de superficies, detección de topologías, modelado de sólidos, etc.
- Generación de mallas. Incluye, entre otros, los algoritmos de *paving*, *trimesh*, *tetmesh* (mallados triangular o tetraédrico de Delaunay), primitivas de mallas (círculos, tetraedros, pentágonos, esferas y triángulos), etc. Permite realizar operaciones sobre las mallas, como aumentar o reducir la resolución de mallado, seleccionar automáticamente el algoritmo óptimo para mallar, o aplicar algoritmos de suavizado y depurado de la calidad de la malla.
- Numerosos formatos de entrada/salida, tanto de geometrías como de mallas.
- Módulo de evaluación de la calidad de las mallas, en función de las métricas seleccionadas. Esto permite optimizar mallas para distintos tipos de simulaciones, lo que la hace una herramienta altamente compatible.

1.3.2.1.3. Hypermesh

Hypermesh es un pre-procesador de elementos finitos de alto rendimiento que permite analizar y diseñar sistemas con muy buenos resultados, distribuido como un paquete de la herramienta *Hyperworks* por la empresa americana *Altair Engineering Inc.* [33]. Contiene módulos para importar, editar y mallar geometrías con diferentes algoritmos, entre los que podemos distinguir:

- Mallados superficiales. Esta herramienta dispone de diferentes algoritmos y opciones para mallar, pudiendo variar las formas y tamaños de los elementos. También incluye opciones para evaluar la calidad de mallas, según diversos criterios de calidad seleccionados por el usuario.
- Mallados sólidos. Usando geometrías sólidas, es posible conectar, separar o partir modelos sólidos mediante mallas de tetraedros o hexaedros.

- Generación automática de mallas, minimizando así los datos a introducir para usuarios no avanzados y generando mallas de buena calidad.
- Interoperabilidad con herramientas *CAD*, con muchos formatos de entrada y salida que la hacen compatible con la mayoría de herramientas de análisis de mallas.

1.3.2.2. Libres

Las dos herramientas presentadas en esta sección se distribuyen bajo licencia *GNU General Public License (GPL)* [34].

1.3.2.2.1. Gmsh

Gmsh es una herramienta que permite modelar, mallar y post-procesar geometrías. Contiene numerosos algoritmos de mallado, tanto para el caso bidimensional como tridimensional. Principalmente genera mallas compuestas con elementos triangulares o tetraedros, pero también tiene algoritmos de mallado con cuadrángulos o hexaedros.

Los formatos de geometría de entrada son más limitados que los de las herramientas comerciales anteriormente mencionadas, pero cabe destacar que trabaja con los formatos *igs* y *dxf*, que se explican en el *Capítulo 2*. Permite construir geometrías siguiendo las especificaciones de su propio formato sobre ficheros de texto o desde su interfaz de usuario, y además incluye ciertas operaciones para transformar las superficies de la geometría.

Con esta herramienta, es posible simular las mallas de salida con núcleos externos y aplicar algunas operaciones de post-procesado y visualización sobre los resultados de las simulaciones.

1.3.2.2.2. Salome

Salome es una herramienta con aplicaciones tanto de pre- como post-procesado para simulaciones numéricas. En general, presenta más opciones de formatos de entrada y operaciones de mallado y procesado que *Gmsh*.

Trabaja con varios formatos de geometrías de entrada, entre ellos el *igs*. Es posible realizar diversas operaciones sobre los modelos geométricos, desde crear superficies con primitivas a editar las existentes o crear nuevas a partir de estas, bien sea revolucionando, replicando, etc. También incluye operaciones booleanas.

En el módulo de mallado, dispone de varios algoritmos para generar mallas de triángulos, cuadrángulos, hexaedros o tetraedros. Es posible editar las mallas una vez generadas, bien sea moviendo o eliminando los nodos o elementos existentes, o aplicando operaciones específicas como puede ser la rotación, traslación, reflejo, etc. Adicionalmente, permite refinar las partes deseadas de la malla, mejorando su calidad o cambiando la resolución de mallado.

También es posible simular, tanto con sus núcleos como con otros externos siempre y cuando respeten los formatos de salida. Una vez importados los resultados, se pueden visualizar o extraer parámetros de interés, por ejemplo, filtrando solo aquellos datos que estén por encima o por debajo de un determinado umbral. [35]

1.4. JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS EMPLEADAS

En el ámbito del mallado superficial, el algoritmo de partida escogido en esta tesis es el de *paving* o *enladrillado*, principalmente por los siguientes motivos:

- Al emplear elementos cuadrangulares, se reduce considerablemente el número de incógnitas a analizar.
- Proporciona mallas altamente estructuradas, facilitando así la convergencia de los análisis.
- Como se trata de un método que comienza a generar los elementos desde las fronteras originales de la geometría, se garantiza una alta calidad de mallado en estas regiones, y consecuentemente, buenos resultados.

No obstante, el generador de mallas superficiales desarrollado contiene numerosas mejoras que se verán en el *Capítulo 3*, tales como la inserción de elementos triangulares en ocasiones puntuales o el uso de elementos conformados a las superficies, que permiten reducir notablemente el número de elementos con respecto a las mallas de facetas planas.

Por extensión del mallado superficial, el algoritmo más adecuado para generar mallas volumétricas sería el de *plastering* [30]. Sin embargo, la complejidad del método crece considerablemente a la hora de generar nuevos elementos o de evaluar su calidad, y más aún en la detección y resolución de frentes próximos de hexaedros. Es por eso que se opta por

desarrollar una técnica propia basada en el método de mallado por rejillas [27], bastante sencilla, en la que se generan mallas altamente estructuradas compuestas principalmente por hexaedros perfectos, sin ser necesario evaluar la calidad o las intersecciones de los mismos, ya que se sabe a priori que todos los elementos están perfectamente contruidos y distribuidos. Los principales inconvenientes de la técnica es que trabaja con un tamaño de hexaedros constante sobre un mismo objeto, y produce mayores errores en el mallado cuantas más aristas vivas contiene la geometría, como se verá más adelante.

1.5. ESTRUCTURA DE LA TESIS

La presente tesis está compuesta de 7 capítulos, en los que expone gradualmente desde los motivos para llevar a cabo este trabajo a las técnicas de mallado desarrolladas a medida que evoluciona la herramienta, siempre buscando optimizar el funcionamiento del conjunto “herramienta de mallado-núcleo de simulación”.

En el *Capítulo 1* se realiza una introducción y se exponen los objetivos de la presente tesis. En ella se comentan las principales técnicas de mallado desarrolladas a lo largo de la historia y que han servido como base para la gran mayoría de algoritmos que todavía se desarrollan, generalmente siendo estos variantes, mejoras o combinaciones de las originales. También se justifican las técnicas escogidas para desarrollar la herramienta de mallado deseada.

El *Capítulo 2* sirve como una base de conceptos importantes sobre el modelado matemático de las geometrías y los algoritmos de simulación electromagnética que se aplicarán sobre las mallas generadas.

El *Capítulo 3* es el verdadero núcleo del trabajo, en el que se exponen detalladamente las técnicas de mallado implementadas y sus principales características para satisfacer las necesidades de los núcleos de simulación.

Una vez conseguida una técnica robusta capaz de mallar con un gran número de elementos geometrías complejas, se lleva a cabo la optimización de la misma. Así pues, en el *Capítulo 4* se presentan los métodos adicionales incluidos en el mallador desarrollado, con finalidades que van desde la aceleración de la herramienta a la optimización del modelo geométrico.

Para validar la herramienta, en el *Capítulo 5* se presentan numerosas simulaciones con los núcleos de cálculo electromagnético para los que ha sido diseñado el mallador, realizadas con la herramienta NEWFASANT [36]. Estas simulaciones tienen distintos puntos de vista: algunas verifican las técnicas desarrolladas comparando resultados procedentes de diferentes malladores, otras contrastan los resultados de simular con el mismo método electromagnético mallas generadas con diferente resolución de elementos, se analizan tiempos de mallado para evaluar el impacto de las mejoras incluidas, etc.

Para finalizar el trabajo, en el *Capítulo 6* y el *Capítulo 7*, se resumen las conclusiones obtenidas de la presente tesis, así como las principales líneas futuras de trabajo para seguir mejorando la herramienta.

1.6. REFERENCIAS

- [1] F. S. d. Adana, O. Gutierrez, I. González, M. F. Cátedra y L. Lozano, «Practical Applications of Asymptotic Techniques in Electromagnetics», Alcalá de Henares: Artech House, 2010.
- [2] L. A. Piegl y W. Tiller, «The NURBS Book», Berlín: Springer, 1997.
- [3] I. González, E. García, F. S. d. Adana y M. F. Cátedra, «Monurbs: A Parallelized Fast Multipole Multilevel Code For Analysing Complex Bodies Modelled By NURBS Surfaces», *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 23, nº 2, pp. 134-142, 2008.
- [4] C. Delgado, E. García, F. Cátedra y R. Mitra, «Generation of Characteristic Basis Functions Defined over Large Surfaces Multilevel Approach», *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 57, nº 4, pp. 1299-1301, 2009.
- [5] F. S. d. Adana, I. González, O. Gutiérrez, L. Lozano y M. F. Cátedra, «Method Based on Physical Optics for the Computation Radar Cross Section Including Diffraction and Double Effects of Metallic and Absorbing Bodies Modeled With Parameter surfaces», *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, vol. 52, nº 12, pp. 3295-3303, 2004.
- [6] I. González Diego, «Contribución a la Mejora de la GTD en la Predicción de los Sistemas Radiantes sobre Estructuras Complejas», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares., 2003.
- [7] R. R. Lober, T. J. Tautges y R. A. Cairncross, «The Parallelization of an Advancing-front, All-quadrilateral Meshing Algorithm for Adaptive analysis», *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable*, Albuquerque, Nuevo México, EEUU, 1995.
- [8] A. R. Bretones, R. Mittra y R. G. Martin, «A hybrid technique combining the method of moments in the time domain and FDTD», *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, nº 8, pp. 281-283, 1998.
- [9] F. Vipiana, P. Pirinoli y G. Vecchi, «A multiresolution method of moments for triangular meshes», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, nº 7, pp. 2247-2258, 2005.
- [10] G. F. Carey y J. T. Oden, «Finite Elements: Computational aspects», New Jersey, EEUU: Prentice-Hall, 1984.
- [11] M. T. Jones y P. E. Plassman, «Adaptive Refinement of Unstructured Finite-Element Meshes», *Finite Elements in Analysis and Design*, nº 25, pp. 41-60, 1997.
- [12] S. J. Owen, «A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology», *Proceedings of the 7th International*

Meshing Roundtable, Dearborn, Michigan, EEUU, 1998.

- [13] S. P. Spekreijse y J. W. Boerstoele, «An Algorithm to Check the Topological Validity of Multi-Block Domain Decompositions», *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Greenwich, Londres, Inglaterra, 1998.
- [14] M. Bern y D. Eppstein, «Mesh Generation and Optimal Triangulation», *Computing in Euclidean Geometry*, Singapore, 1992, pp. 23-90.
- [15] J. R. Shewchuk, «Delaunay Refinement Mesh Generation», Pittsburgh, Pennsylvania, EEUU: Ph. D. thesis, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1997.
- [16] T. J. Baker, «Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation», *Engineering with Computers*, vol. 5, nº 3-4, pp. 161-175, 1989.
- [17] R. W. Lewis, Y. Zheng y A. S. Usmani, «Aspects of adaptive mesh generation based on domain decomposition and Delaunay triangulation», *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 20, pp. 47-70, 1995.
- [18] S. J. Owen, M. L. Staten, S. A. Canann y S. Saigal, «Q-Morph: an indirect approach to advancing front quad meshing», *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 44, pp. 1317-1340, 1999.
- [19] S. J. Owen, M. L. Saten, S. A. Canann y S. Saigal, «Advancing Front Quadrilateral Meshing Using Triangle Transformation», *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, Dearborn, Michigan, USA, 1998.
- [20] M. A. Yerry y M. S. Shephard, «Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1965-1990, 1984.
- [21] A. Díaz Morcillo, «Métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados mediante el método de los elementos finitos», Valencia: Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [22] T. D. Blacker y M. B. Stephenson, «Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, nº 4, pp. 811-847, 1991.
- [23] J. R. Shewchuk, «Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement», *Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry*, pp. 86-95, 1998.
- [24] D. N. Arnold, A. Mukherjee y L. Pouly, «Locally adapted tetrahedral meshes using bisection», *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 22, nº 2, pp. 431-448, 2000.
- [25] L. A. Freitag y C. Ollivier-Gooch, «A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques», *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, pp. 87-106, 1996.
- [26] R. Schneiders, «Algorithms for quadrilateral and hexahedral mesh generation», *Proceedings of the VKI Lecture Series on Computational Fluid Dynamics*, 2000.
- [27] R. Schneiders, «A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes», *Engineering with Computers*, vol. 12, nº 3-4, pp. 168-177, 1996.
- [28] R. Schneiders, R. Schindler y F. Weiler, «Octree-based generation of hexahedral element meshes», *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 1996.
- [29] Y. Ito, A. M. Shih y B. K. Soni, «Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, nº 13, pp. 1809-1833, 2009.
- [30] M. L. Staten, S. J. Owen y T. D. Blacker, «Unconstrained Paving & Plastering: A New Idea for Hexahedral Mesh Generation», *Proceedings of the 14th. International Meshing Roundtable*, San Diego, California, USA, 2005.
- [31] The International Center for Numerical Methods in Engineering, «GiD,» CIMNE, [En línea]. Disponible: <http://gid.cimne.upc.es/>. [Último acceso: Julio 2012].
- [32] Sandia National Laboratories, «Cubit,» [En línea]. Disponible: <http://cubit.sandia.gov/>. [Último acceso: Julio 2012].
- [33] Altair Hyperworks, «Altair Hyperworks, A Platform for innovation,» [En línea]. Disponible:

<http://www.altairhyperworks.com>. [Último acceso: Julio 2012].

[34] GNU, Disponible: «<http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>,» [En línea]. [Último acceso: Septiembre 2012].

[35] Salome, Disponible; «<http://www.salome-platform.org/>,» [En línea]. [Último acceso: Septiembre 2012].

[36] NewFasant, «NewFasant,» [En línea]. Disponible: <http://www.fasant.com/>. [Último acceso: Diciembre 2012].

2. MODELADO GEOMÉTRICO

2.1. INTRODUCCIÓN

La representación de geometrías mediante métodos matemáticos es una constante línea de trabajo, especialmente impulsada por la necesidad de trabajar con ellas en diferentes aplicaciones software. El objetivo es obtener un modelo matemático que represente de forma fiel al escenario real, que sea sencillo de manejar, y con la menor cantidad posible de información, lo cual resulta realmente complejo en la mayoría de ocasiones. Para tratar de solventar los problemas de modelado específicos para cada aplicación, aparecen las herramientas de Diseño de Geometrías Asistido por Ordenador (*Computer Aided Geometric Design*, CAGD), con el objetivo de crear de forma sencilla los modelos geométricos independientemente de su aplicación, y sin necesidad de tener conocimientos sobre la teoría matemática usada para tal fin.

Seis grandes grupos de métodos de modelado de cuerpos sólidos 3D han sido empleados a lo largo de la historia: formas parametrizadas [1], descomposición celular [2], modelos de barridos [3], geometría sólida constructiva (*Constructive Solid Geometry*, o CSG) [3], [4], modelos de fronteras [1], [2], [5] y modelos de hilos [5]. Cada una de las citadas formas de modelar matemáticamente un objeto geométrico presenta ventajas e inconvenientes frente a las demás, por lo que la elección de una u otra dependerá de la finalidad del modelo y de los requisitos exigidos. [6]

Para la aplicación concreta del análisis con los métodos de electromagnetismo a los que está orientado el presente trabajo, se trabaja con dos tipos de modelados geométricos:

- Por una parte está el modelado mediante facetas planas, que se trata de un tipo particular de modelos de fronteras planas en el que se representa la geometría como una colección de facetas planas compuestas normalmente por tres o cuatro aristas rectas, conectadas entre sí para completar un modelo continuo. Este método resulta tremendamente sencillo, pero la calidad de los resultados está condicionada por la resolución de facetas utilizada, llegando a ser necesarios

cientos de miles de elementos planos para representar con precisión modelos complejos compuestos idealmente por formas curvas. En la Figura 2.1 se muestra el ejemplo de un helicóptero modelado con 6.291 facetas planas, en el que el error cometido al discretizar las curvaturas de la geometría original es aceptable (aunque depende de la aplicación) debido al elevado número de facetas empleadas. Además, en este tipo de modelos, el vector normal de las facetas presenta discontinuidades indeseadas como consecuencia del modelado plano.

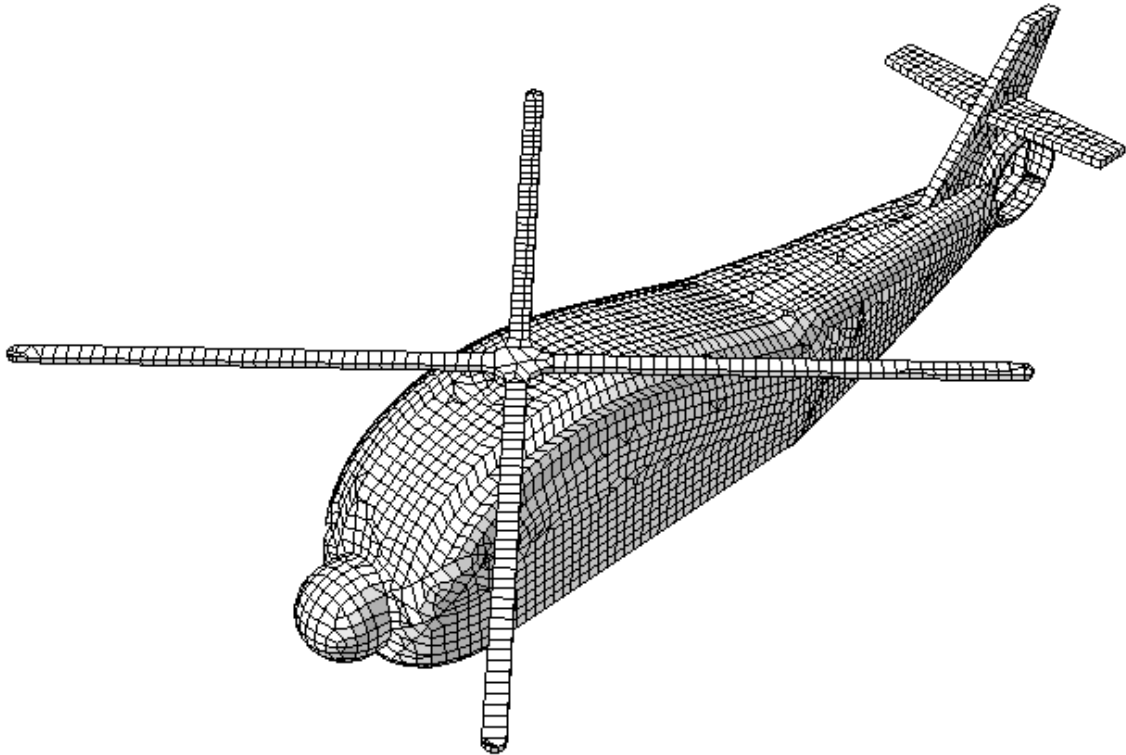


Figura 2.1: Helicóptero modelado por facetas planas.

- Por otra parte, el modelado mediante superficies paramétricas curvas es otra variante de los modelos de fronteras, pero que permite describir eficientemente cualquier tipo de geometrías con una cantidad de información relativamente pequeña respecto a otras formas de modelado. Más concretamente, las superficies *Non Uniform Rational B-Spline* (NURBS, de aquí en adelante) [7], [8] son actualmente una de las soluciones más empleadas para trabajar con modelos geométricos en cualquier tipo de aplicaciones. En la Figura 2.2 se muestra el mismo ejemplo del helicóptero de la Figura 2.1, pero modelado únicamente con 146 superficies paramétricas. La precisión de este tipo de modelado en comparación con el de facetas planas es mucho mayor, requiriendo menos información y sin que haya discontinuidades artificiales en los vectores normales.

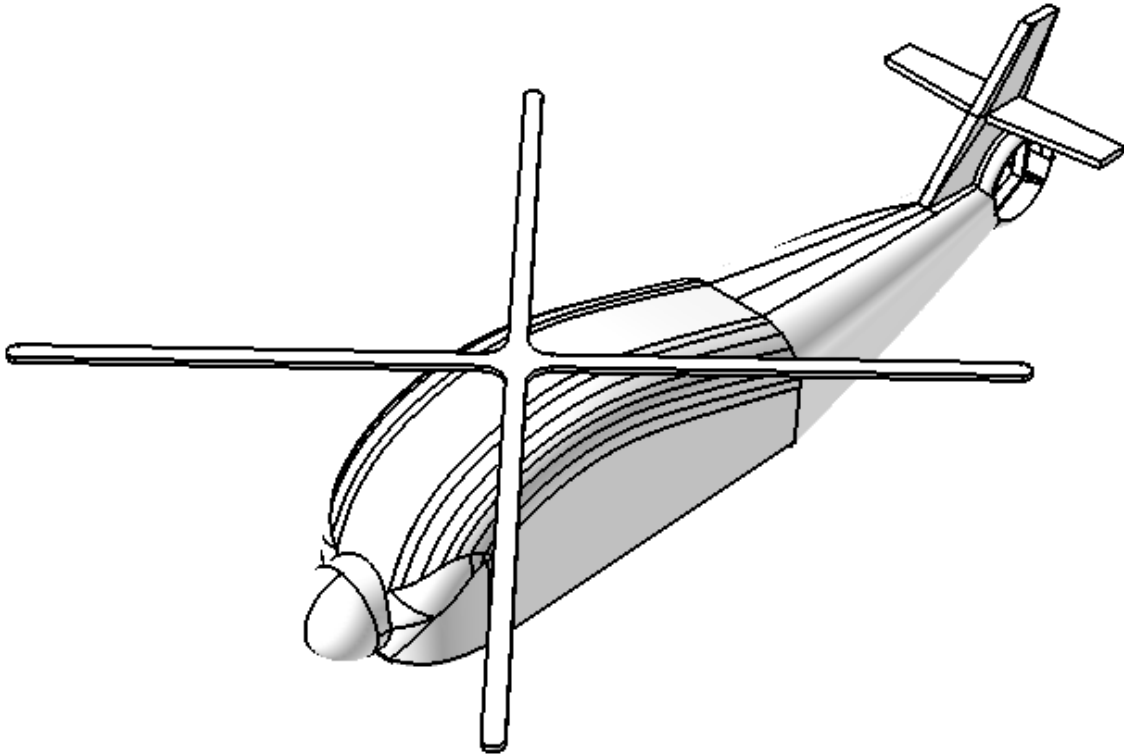


Figura 2.2: Helicóptero modelado por superficies paramétricas.

Como se verá en las próximas secciones, las facetas planas se pueden considerar como el caso más sencillo de superficies paramétricas, por lo que la técnica de generación de mallas desarrollada en la presente tesis trabaja siempre con superficies NURBS, independientemente del formato del modelo geométrico de entrada. Para ello, es necesario realizar la conversión de algunos de los formatos CAGD más comunes, que suelen representar las superficies como una nube de puntos de paso sobre las mismas, a una colección de datos que definan completamente las NURBS.

Este capítulo se ha dividido en tres secciones básicas en las que se tratan todos los aspectos relacionados con el modelado, procesado y análisis de las geometrías. En la primera parte, se resume la evolución de los modelos matemáticos más comunes de representación de curvas y superficies de formas arbitrarias, hasta llegar al modelado mediante NURBS. En la segunda parte, se detalla el proceso conocido como interpolación, en el que se convierten varios formatos de ficheros geométricos que no trabajan directamente con superficies paramétricas a entidades NURBS. En la última sección, se describen las principales técnicas de cálculo electromagnético con las que hay que analizar las mallas obtenidas: el Método de los Momentos (MoM) y la Óptica Física (PO), aplicada particularmente al cálculo de Sección-Radar (RCS); detallando los requisitos que estas deben cumplir para que las simulaciones converjan rápidamente y los resultados sean correctos.

2.2. MODELOS MATEMÁTICOS MÁS COMUNES

Antes de estudiar las superficies NURBS, conviene introducir una serie de conceptos que sirven como base para el modelado matemático de las mismas. En esta sección, se presenta un recorrido por orden de conocimientos y complejidad en el que se explican los elementos sobre los que se basan las curvas y superficies NURBS. [7], [8]

2.2.1. Curvas de Bézier

Una curva de Bézier viene dada por una serie de puntos que componen su polígono de control, pasando esta por los puntos inicial y final del polígono y viniendo el resto de la misma determinado por la distribución de los demás puntos, que ponderan su influencia sobre la forma de la curva mediante polinomios de Bernstein. Además, la curva se puede transformar como una función dependiente de una sola coordenada paramétrica t , de tal manera que siempre es posible pasar cualquier punto de la misma de coordenadas cartesianas a paramétricas y viceversa. Para visualizar con un ejemplo los parámetros mencionados, en la Figura 2.3 se representa en línea continua una curva de Bézier, definida por el polígono de control formado por los 7 puntos mostrados. La curva se ha representado en el espacio cartesiano (en este caso omitiendo la coordenada Z), y también en su versión paramétrica como una recta definida entre 0 y 1. Todas las curvas tienen la misma forma recta al representarlas en el espacio paramétrico, sin importar su complejidad en el espacio real.

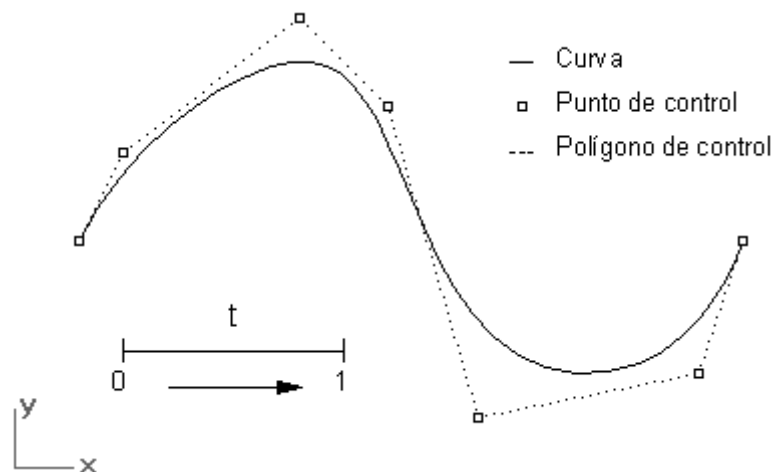


Figura 2.3: Curva de Bézier y polígono de control asociado.

Una curva de Bézier de grado n , cuyo polígono de control viene definido por el vector de puntos en el espacio real \bar{b}_i se puede expresar según la expresión (2.1), donde t representa

la variable en el espacio paramétrico, comprendida en el rango $[0,1]$, y $B_i^n(t)$ son los denominados polinomios de Bernstein, dados por la ecuación (2.2).

$$\bar{C}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{b}_i B_i^n(t), \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (2.2)$$

Las propiedades más importantes de las curvas de Bézier son las siguientes:

- El número de puntos de control de la curva es igual a su orden, que además coincide con el grado de esta más uno.
- La curva queda contenida en la envolvente convexa del polígono de puntos de control, por lo que se puede intuir la forma aproximada de la misma a partir de la distribución de sus puntos.
- Los puntos inicial y final de la curva siempre coinciden con el primer y último punto de control, respectivamente. No ocurre así con los puntos intermedios.
- La modificación de un punto de control afecta a toda la curva.

2.2.2. Curvas de Bézier racionales

Una variante de las curvas de Bézier es el caso de las racionales, resultantes de ponderar la proximidad de la curva sobre cada punto de control. Introduciendo esta modificación en la expresión (2.1), se obtiene el nuevo tipo de curvas, definido por la relación (2.3), en la que se denota como w_i al peso del i -ésimo punto de control, y para el caso de curvas normalizadas, se cumple que $0 < w_i \leq 1$ para cualquier punto del polígono de control. La ponderación de los puntos de control de la curva ofrece una mayor flexibilidad para representar curvas canónicas, como pueden ser circunferencias, elipses o parábolas.

$$\bar{C}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \bar{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}, \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.3)$$

Comparando las expresiones (2.3) y (2.1), se observa que las curvas de Bézier son un caso particular de las curvas de Bézier racionales en el que todos los pesos de los puntos de control son unitarios.

Para visualizar gráficamente la influencia de los pesos en la forma de la curva, en la Figura 2.4 se compara una curva de Bézier (izquierda) y una curva de Bézier racional con pesos no normalizados (derecha), ambas con los mismos puntos de control, también representados junto con sus respectivos pesos. Se observa que cuando los pesos son unitarios, la curva

presenta variaciones más suaves, mientras que cuando son mayores que la unidad, esta tiende a acercarse a ellos, y a alejarse cuando son menores que la unidad.

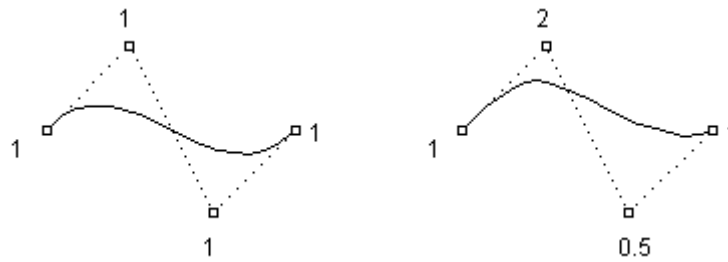


Figura 2.4: Curva de Bézier y Racional de Bézier.

2.2.3. Superficies de Bézier racionales

Añadiendo una nueva dimensión a las curvas de Bézier racionales y aplicando las correcciones necesarias para mantener la equivalencia, se pasa de tener curvas definidas por sus polígonos de control a superficies delimitadas por sus mallas de puntos de control. El espacio paramétrico de la curva según t , se convierte en un nuevo espacio paramétrico de la superficie definido por dos coordenadas u y v . En la Figura 2.5, se muestra el ejemplo de una superficie de Bézier junto con su malla de puntos de control en el espacio real, y forma en el espacio paramétrico. Análogamente a lo que ocurre con las curvas, todas las superficies de Bézier se representan como un cuadrado en el espacio paramétrico.

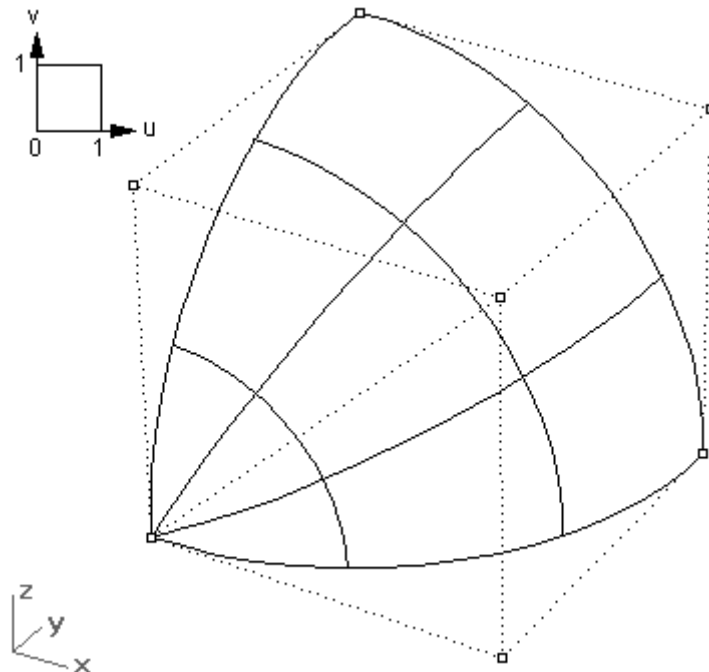


Figura 2.5: Superficie de Bézier y malla de puntos de control.

La expresión (2.4) representa la forma matemática de una superficie de Bézier racional, en función de los polinomios de Bernstein, que ahora dependen de las dos dimensiones paramétricas.

$$\bar{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} \bar{b}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)} = \frac{\bar{P}(u, v)}{W(u, v)} \quad (2.4)$$

Las propiedades de las superficies de Bézier racionales también son una extensión de las de las curvas racionales:

- Ahora, m y n son los grados de la superficie para las coordenadas paramétricas u y v , respectivamente, el orden es $m+1$ en u y $n+1$ en v , y el vector de puntos de control se transforma en una malla de $(m+1) \cdot (n+1)$ puntos, ponderados cada uno por su correspondiente peso w_{ij} . El espacio paramétrico pasa de ser una línea en t , a un cuadrado en u y v (independientemente de la forma en el espacio real de la superficie), teniendo así que $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 1$, tal y como se observa en la Figura 2.5.
- La caja definida por la malla de puntos de control envuelve a la superficie interpolada, asegurando que la superficie no sale fuera de la malla.
- La superficie en el espacio real pasa por el primer y último punto de control en cada dirección paramétrica.

El caso más simple de una superficie de Bézier racional es el de una faceta plana formada por 2×2 puntos de control, teniendo por tanto, orden 2 y grado 1 en las dos coordenadas paramétricas. Otro ejemplo puede ser un sector cilíndrico compuesto por una malla de 5×2 puntos de control, de grado 4 en u y 1 en v . Ambos casos se han representado en la Figura 2.6.

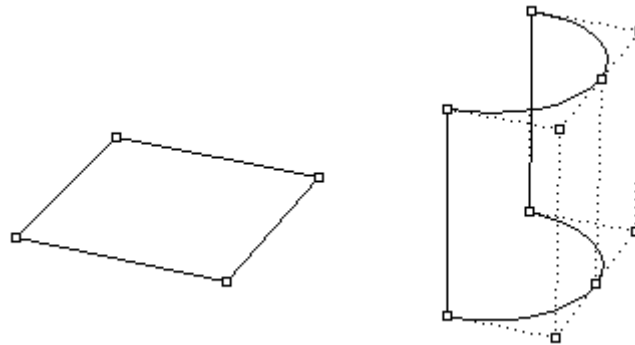


Figura 2.6: Ejemplo de superficies de Bézier racionales.

Sin embargo, a medida que se complican las características de las superficies, disminuye la precisión de las superficies de Bézier racionales, ya que si las formas requieren grados muy altos (como norma general, no se pueden modelar correctamente superficies de Bézier racionales con orden mayor de 10) pueden aparecer ciertas oscilaciones en las superficies generadas que no representen adecuadamente la realidad.

2.2.4. Curvas B-Spline

Una curva B-Spline se expresa de forma similar a las curvas de Bézier, por medio de una sucesión de polinomios, llamados funciones base B-Spline (frente a los de Bernstein de las curvas de Bézier), que se pueden expresar según la relación (2.5). Además, p es el grado de la curva, k es el orden, que resulta igual al grado más uno, n es el número de puntos del polígono de control, que viene dado por el vector de puntos \bar{d}_i , y $N_i^p(t)$ son las funciones base B-Spline, que se calculan recursivamente siguiendo la expresión (2.6).

$$\bar{C}(t) = \sum_{i=1}^n \bar{d}_i N_i^p(t), \quad \text{con } 1 \leq p \leq n \quad (2.5)$$

$$N_i^p(t) = \frac{(t - t_i)N_i^{p-1}(t)}{t_{i+p} - t_i} + \frac{(t_{i+p+1} - t)N_{i+1}^{p-1}(t)}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} \quad (2.6)$$

Cumpléndose, por definición, la igualdad (2.7).

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.7)$$

Las bases B-Spline se definen recursivamente a partir de un conjunto de valores que forman el llamado vector de nudos $\{t_i\}_{i=1}^{n+k}$, cuyo número de elementos, n_{nudos} , coincide con el orden más el número de puntos de control, tal y como indica la expresión (2.8). Este vector está compuesto por una sucesión creciente de números reales, comprendidos entre 0 y 1 (para el caso normalizado). Un nudo puede repetirse varias veces en el vector de nudos, denotándose como la multiplicidad al número de repeticiones de cada nudo. La distribución del vector de nudos caracteriza las relaciones de continuidad a lo largo de la curva, de tal manera que la multiplicidad de un determinado nudo tiene influencia sobre el tipo de continuidad de la curva en el punto que se corresponde con el valor paramétrico del mismo.

$$n_{\text{nudos}} = p + n + 1 = k + n \quad (2.8)$$

El vector de nudos define varias características de la curva B-Spline. Si los distintos valores de los nudos están equiespaciados se habla de curva uniforme, mientras que en caso

contrario se trata de una curva no uniforme (racional o NURS, si además se ponderan los puntos de control mediante pesos). Si la multiplicidad de los extremos del vector de nudos coincide con el orden de la curva, se califica al vector como abierto. Para el caso de una curva NURBS, de orden k y con n puntos de control, el vector de nudos tiene la forma indicada en la relación (2.9), en la que se observa que el número de nudos repetidos tanto en 0 como en 1 coincide con el orden de la curva.

$$0 = t_1 = t_2 = \dots = t_k < t_{k+1} \leq t_{k+2} \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = 1 \quad (2.9)$$

Cabe destacar como una de las propiedades más importantes de las curvas B-Spline, que la modificación en uno de sus puntos de control solo tiene repercusiones en su zona local.

2.2.5. Curvas B-Spline racionales

Cuando se tiene una curva B-Spline de grado p y orden k , con n puntos de control dados en el vector \bar{d}_i que se ponderan mediante pesos w_i , se habla de curva B-Spline racional, cuya expresión matemática viene dada según la expresión (2.10).

$$\bar{C}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{d}_i N_i^p(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_i^p(t)} \quad \text{con } 1 \leq p \leq n \quad (2.10)$$

Para simplificar la expresión anterior, se definen las funciones base racionales, $\{R_i^p(t)\}$, siguiendo la ecuación (2.11). Usando las nuevas funciones base, es posible rescribir las curvas B-Spline racionales para expresarlas como la expresión (2.12).

$$R_i^p(t) = \frac{w_i N_i^p(t)}{\sum_{i=1}^n w_i N_i^p(t)}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad (2.11)$$

$$\bar{C}(t) = \sum_{i=1}^n R_i^p(t) N_i^p(t) \quad \text{con } 1 \leq p \leq n \quad (2.12)$$

2.2.6. Superficies B-Spline racionales

Conceptualmente, se pueden definir las superficies B-Spline racionales como una colección de superficies de Bézier racionales de bajo orden conectadas y continuas entre si, con la finalidad de simplificar formas que tendrían un orden demasiado elevado al modelarlas con una única superficie de Bézier racional, evitando así las posibles oscilaciones que esta podría presentar. Matemáticamente, la principal diferencia con las superficies de Bézier es la definición de las bases o polinomios a utilizar.

Las bases se definen para cada dimensión del espacio paramétrico, igual que para el caso de las curvas. Así, la formulación y las propiedades de las mismas son las presentadas en la sección 2.2.4, cambiando la dimensión paramétrica t por u o v , según corresponda.

Las superficies B-Spline racionales se expresan añadiendo una nueva dimensión a las curvas, siguiendo la expresión (2.13). En este caso, $N_i^p(u)$ y $N_j^q(v)$ son las bases B-Spline de grados p y q (órdenes $k = p + 1$ y $l = q + 1$), respectivamente para cada coordenada paramétrica, \bar{d}_{ij} son los puntos de control que definen la superficie, ponderados por sus respectivos pesos w_{ij} , y m y n son el número de puntos de control en cada coordenada.

$$\bar{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} \bar{d}_{ij} N_i^p(u) N_j^q(v)}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} N_i^p(u) N_j^q(v)} \text{ con } 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n \quad (2.13)$$

Análogamente a como se ha hecho en las curvas, se definen las funciones base racionales, que se calculan con la expresión (2.14), para simplificarlas a la ecuación (2.15).

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{w_{ij} N_i^p(u) N_j^q(v)}{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n w_{kl} N_k^p(u) N_l^q(v)} \text{ con } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \quad (2.14)$$

$$\bar{S}(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} R_{i,j}(u, v) \quad (2.15)$$

El número de nudos en u o v es $m + k$ o $n + l$, respectivamente, y sus formatos vienen determinados por las expresiones (2.16) y (2.17), de donde se observa que los nudos en 0 y 1 para cada coordenada paramétrica se repiten k y l veces.

$$0 = u_1 = u_2 = \dots = u_k < u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \dots \leq u_m < u_{m+1} = \dots = u_{m+k} = 1 \quad (2.16)$$

$$0 = v_1 = v_2 = \dots = v_l < v_{l+1} \leq v_{l+2} \leq \dots \leq v_n < v_{n+1} = \dots = v_{n+l} = 1 \quad (2.17)$$

Cuando los nudos en alguna de las dimensiones paramétricas no se encuentran equiespaciados, se habla de superficies NURBS (acrónimo inglés de *Non-Uniform Rational B-Spline*) o B-Spline Racionales No Uniformes. Este tipo de superficies presentan la mayor complejidad (y posible inestabilidad) de las vistas hasta ahora, si bien proporcionan la mejor precisión para representar formas arbitrarias.

En la parte izquierda de la Figura 2.7, se muestra el ejemplo de una superficie B-Spline racional junto con su malla de puntos de control, a la que se le han asignado pesos unitarios. En la derecha, se resumen el resto de parámetros de interés, exceptuando la posición de los puntos de control. Como es una superficie uniforme, los nudos están equiespaciados.

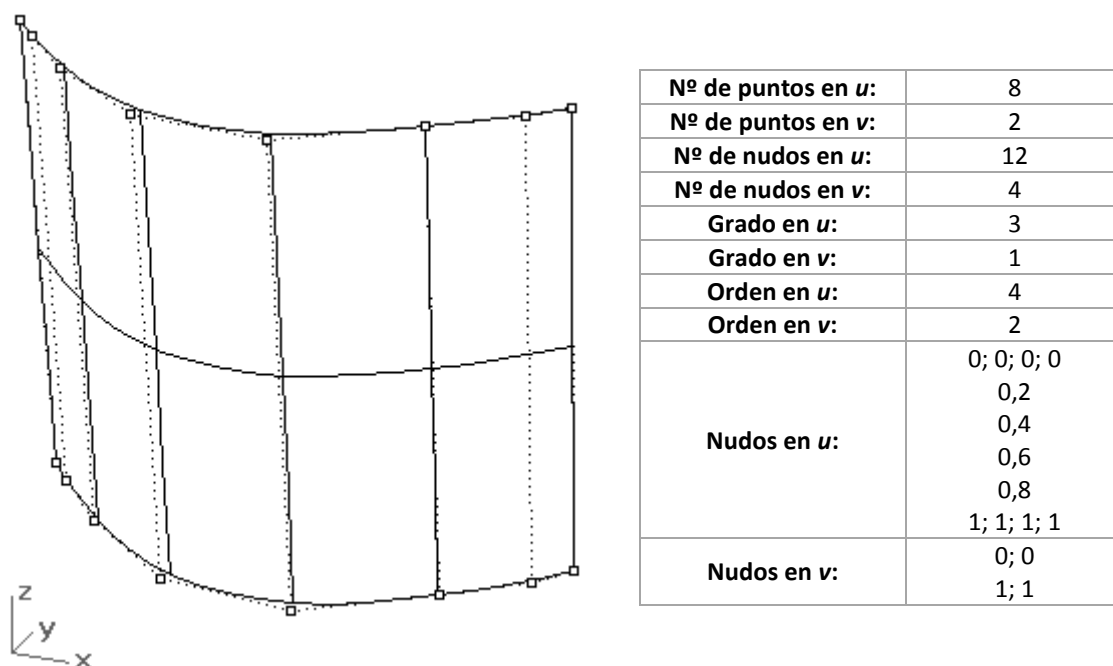


Figura 2.7: Ejemplo de superficie B-Spline racional con sus parámetros asociados.

Para contrastar las diferencias entre las superficies B-Spline uniformes y no uniformes, el ejemplo de la Figura 2.7 se ha repetido empleando una distribución de nudos en u no equiespaciada, obteniendo así la superficie representada en la parte izquierda de la Figura 2.8, en la que se pueden ver las diferencias entre las líneas isoparamétricas (las líneas continuas del interior de la superficie) con respecto al caso anterior. Además, se verifica el no equiespaciamiento de los nudos en u en los parámetros asociados de la derecha.

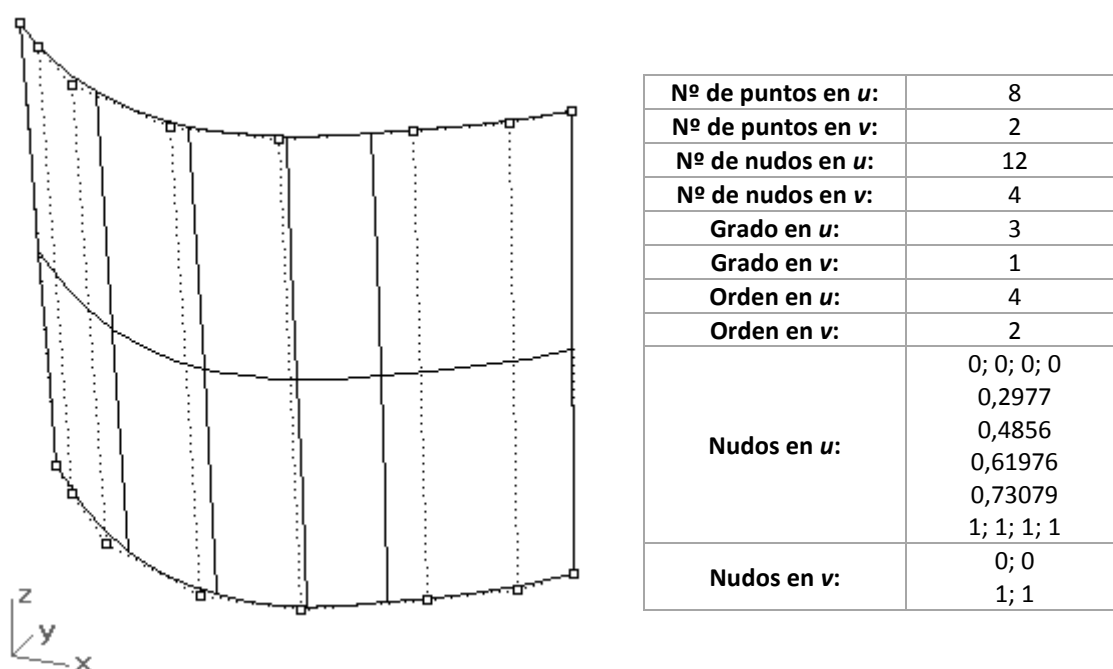


Figura 2.8: Ejemplo de superficie NURBS con sus parámetros asociados.

2.3. SUPERFICIES NURBS

Las superficies NURBS son uno de los modelos matemáticos más importantes para representar geometrías complejas, tales como maquinas industriales, coches, aviones, barcos, etc. Algunos de los motivos de su éxito son:

- Proporcionan unas bases matemáticas sencillas y estables para representar formas canónicas y arbitrarias.
- El diseño con NURBS resulta intuitivo, siendo sencilla su interpretación geométrica.
- Los algoritmos matemáticos de las superficies NURBS son rápidos y numéricamente estables.
- Tanto las superficies como las curvas mantienen la propiedad de invariancia ante diversas operaciones geométricas, como la translación o la rotación.
- Su sencillez y propiedades matemáticas y algorítmicas las hacen altamente eficaces para cualquier tipo de aplicación.
- La cantidad de referencias, técnicas y algoritmos de procesado, o pseudocódigo disponible actualmente, potencian y facilitan el trabajo con este tipo de superficies.
- Se trata de una representación muy extendida disponible en la mayoría de formatos de las herramientas de CAGD.

Estas características, y la importancia de la precisión en el modelado de la geometría para los análisis electromagnéticos son los principales motivos por los que los algoritmos de mallado desarrollados en esta tesis trabajan con superficies NURBS.

Partiendo de los conceptos matemáticos introducidos en la sección anterior, a continuación se describe el algoritmo empleado para generar una NURBS a partir de una descripción básica de la forma deseada, junto con dos de los formatos de modelos geométricos más comunes en las herramientas de CAGD. También se explica el concepto de superficies recortadas y curvas recortadoras, que son un caso particular de NURBS, de gran utilidad.

2.3.1. Interpolación Global

Partiendo de los puntos de paso de una curva o superficie, el algoritmo de interpolación global permite generar todos los parámetros necesarios para modelarla como una NURBS no racional: nudos y puntos de control. Para evitar posibles oscilaciones indeseadas en las superficies interpoladas, los grados empleados en los casos de análisis son pequeños (se han obtenido buenos resultados con grados menores o iguales que 3).

En primer lugar, se presenta el algoritmo de interpolación para curvas, ya que es necesario para poder interpolar las superficies.

2.3.1.1. Interpolación Global de una curva

Para modelar una curva con la interpolación global, se parte de un conjunto de puntos $\{Q_k\}$, con $k = 0, \dots, n$, que se desea interpolar como una curva B-Spline no racional (pesos unitarios) de grado p . Para ello, se asigna un valor paramétrico, \bar{u}_k , a cada Q_k , y se calcula un vector de nudos apropiado $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ a partir de los pares de valores $\bar{u}_k - Q_k$ para usarlo en las funciones base, teniendo el sistema lineal de $(n+1) \cdot (n+1)$ ecuaciones de la expresión (2.18), en el que los puntos de control P_i , son las $n+1$ incógnitas, y $N_i^p(\bar{u}_k)$ son las funciones base.

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_i^p(\bar{u}_k) P_i \quad (2.18)$$

La correcta definición de \bar{u}_k y U afecta a la forma y parametrización de la curva. Asumiendo u comprendida entre 0 y 1, una solución válida puede ser definir los componentes de \bar{u}_k equispaciados, pero no se recomienda, ya que puede producir deformaciones indeseadas en formas complejas, como lazos.

Primero, se define la longitud total cordal, d , que se calcula según la relación (2.19) y representa la distancia total entre los puntos de paso de la curva, unidos con sus adyacentes mediante tramos rectos.

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}| \quad (2.19)$$

A partir de la longitud total cordal, es posible calcular \bar{u}_k de diversas formas, pero uno de los métodos más aceptados consiste en aproximar una parametrización uniforme de la

curva, consiguiendo así muy buenos resultados. Siguiendo este método, se obtiene el vector de coordenadas paramétricas según la relación (2.20), de tal manera que se asigna 0 al primer valor paramétrico, 1 al último y cada valor central se calcula sumando el valor paramétrico del punto de paso anterior mas un factor que depende de la relación entre distancia entre el punto de paso actual y el anterior, y la longitud total cordal d .

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} & k &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

El número de nudos de la curva en el espacio paramétrico, m , se calcula siguiendo la expresión (2.8), obteniendo $m = n + p + 1$. Una vez obtenidos los valores paramétricos asociados a cada punto de paso de la curva, es posible obtener el vector de nudos $U = \{u_0, \dots, u_m\}$, razón por la que estos influyen en la parametrización y forma de la curva interpolada.

La técnica empleada para calcular los nudos, u_k , asigna a los $p + 1$ iniciales el valor 0 y a los $p + 1$ finales el valor 1, y para el resto emplea las coordenadas del espacio paramétrico \bar{u}_k asociadas a los puntos de paso de entrada, tal y como se indica con la ecuación (2.21). Así, los nudos obtenidos reflejan la distribución en el espacio paramétrico de \bar{u}_k seleccionada inicialmente.

$$\begin{aligned} u_0 &= \dots = u_p = 0 & u_{m-p} &= \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} &= \frac{1}{p} \sum_{t=j}^{j+p-1} \bar{u}_t & j &= 1, \dots, n-p \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para completar la interpolación de la curva, es necesario recurrir a 4 funciones matemáticas cuya finalidad es:

- *FindSpan* (n, p, u, U, i). Dado un número de puntos n a interpolar con un grado p , devuelve el índice i dentro de la lista de nudos U sobre el que se puede extender un determinado nudo u .
- *BasisFuns* (n, i, u, U, NBF). Calcula las funciones base distintas de cero, NBF , del nudo u , situado en la posición i del vector de nudos U .
- *LUDecomposition* (A, q, sbw). Para factorizar una matriz A cuadrada de $q \cdot q$ coeficientes con semiancho de banda sbw , como el producto de una matriz triangular inferior y una superior.

- *ForwardBackward*(A, q, sbw, rhs, sol). Dada la matriz A , de dimensiones $q \cdot q$ y semiancho de banda sbw , con el lado derecho del sistema rhs (coordenadas de Q_k), devuelve el vector solución sol del sistema lineal de ecuaciones.

Recopilando lo visto hasta ahora, el proceso de interpolación global de una curva arbitraria con un grado p , compuesta por $n + 1$ puntos, listados en la matriz Q de $r \cdot (n + 1)$ puntos, donde r es el número de coordenadas (2 para paramétricas, 3 para cartesianas) se resume en el pseudocódigo de la Figura 2.9. Con este algoritmo, se calcula un vector de m nudos, U , y los puntos de control de la curva interpolada P .

```

InterpolaciónCurvaGlobal(n,Q,r,p,m,U,P){
    m=n+p+1
    cálculo de uk, según la expresión (2.20)
    cálculo del vector de nudos U, según la expresión (2.21)
    inicialización de NBF a cero
    for (i=0, i<=n, i++){ //Cálculo de matriz de coeficientes NBF
        FindSpan(n,p,uk(i),U,span)
        BasisFuns(span,uk(i),p,U,NBF(i,span-p))
    }
    LUDecomposition(NBF,n+1,p-1)
    for (i=0, i<r, i++){
        FindSpan(n,p,uk(i),U,span)
        BasisFuns(span,uk(i),p,U,NBF(i,span-p))
        for (j=0, j<=n, j++) rhs(j)=Q(j,i)
        ForwardBackward(NBF,n+1,p+1,rhs,sol)
        for (j=0, j<=n, j++) P(j,i)=sol(j)
    }
}

```

Figura 2.9: Algoritmo de interpolación global de una curva.

En la Figura 2.10 se muestra el ejemplo de la interpolación global de una curva a partir de 7 puntos de paso, denotados como Q_0, Q_1, \dots, Q_6 . Como hay que interpolar 7 puntos, se obtienen 7 coordenadas paramétricas iniciales $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_6$ que se utilizan para calcular el vector de nudos y posteriormente, las funciones base. Al interpolar la curva con grado 3, se obtienen 7 puntos de control P_0, P_1, \dots, P_6 con un vector de 11 nudos $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{10}\}$. De la Figura 2.10, se observa que las coordenadas paramétricas intermedias, \bar{u}_i , con $1 \leq i \leq 9$, no coinciden con las calculadas en el vector de nudos, u_j , con $4 \leq j \leq 6$, ya que el número de nudos intermedios es menor, por la multiplicidad de los nudos iniciales y finales, y porque la formulación del método escogido para calcular sus posiciones promedia los p valores paramétricos más próximos, según la expresión (2.21). Los valores de todos los parámetros calculados en la interpolación global de la curva se resumen en la Figura 2.11.

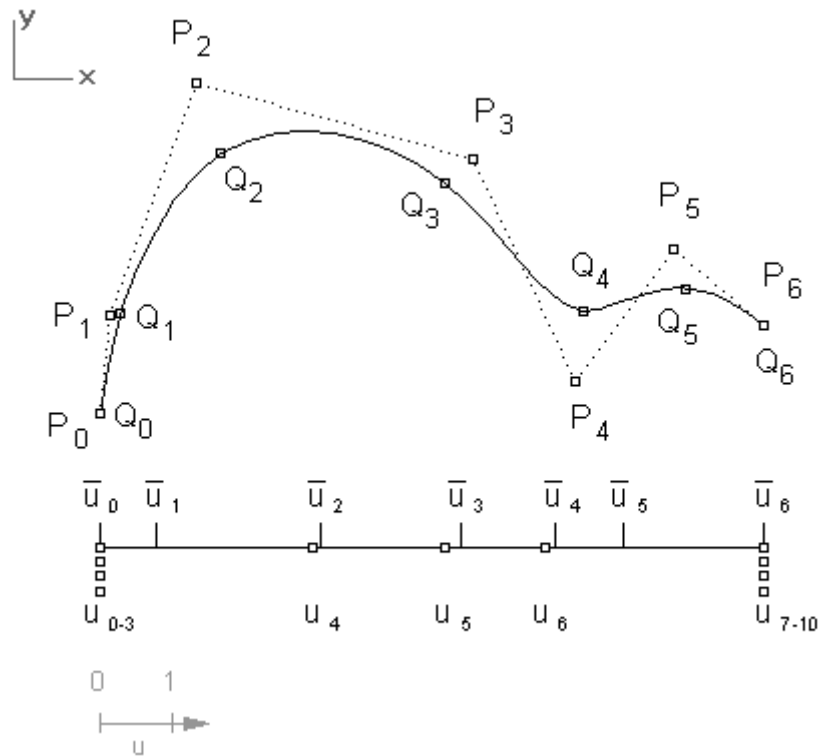


Figura 2.10: Ejemplo de Interpolación Global de una curva.

Nº de puntos de control:	7
Grado:	3
Orden:	4
Nº de nudos:	11
\bar{u}_k	0 ; 0,085 ; 0,3312 ; 0,5419 ; 0,6841 ; 0,7867 ; 1
U	0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0,3194 ; 0,519 ; 0,6709 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1

Figura 2.11: Resumen de parámetros del ejemplo de la Interpolación Global de una curva.

2.3.1.2. Interpolación Global de una superficie

Dada una distribución de $(n + 1) \cdot (m + 1)$ puntos de paso correctamente ordenados y estructurados, siendo $n \geq 1$ y $m \geq 1$, es posible interpolarlos como una superficie B-Spline no racional y no uniforme con un grado determinado obteniendo el resto de parámetros necesarios: los vectores de nudos en u y v , y los puntos de control. Denotando como $\{Q_{k,l}\}$ al conjunto de puntos, con $k = 0, 1, \dots, n$ y $l = 0, 1, \dots, m$, se desea construir una superficie B-Spline no racional de grados $\{p, q\}$ en u y v , respectivamente, que se puede expresar según la relación (2.22).

Análogamente a como se hace con las curvas, el primer paso es calcular la distribución de las coordenadas paramétricas iniciales (\bar{u}_k, \bar{v}_l) , y posteriormente los vectores de nudos U y

V. La solución escogida para determinar las coordenadas paramétricas iniciales de la superficie, \bar{u}_k , consiste en calcular $\bar{u}_0^l, \dots, \bar{u}_n^l$ para cada $l = 0, \dots, m$ empleando la ecuación (2.20), y posteriormente obtener \bar{u}_k promediando todos los \bar{u}_k^l , según la expresión (2.23). Por simplicidad, se explica el algoritmo refiriéndose solamente a la dirección u , ya que los parámetros según la dirección v se obtienen siguiendo el mismo criterio.

$$Q_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \quad (2.22)$$

$$\bar{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \bar{u}_k^l \quad k = 0, \dots, n \quad (2.23)$$

Definiendo la función *Distance3D* ($p1, p2$), como aquella que devuelve la distancia en línea recta entre dos puntos $p1$ y $p2$, y un array local *cds*, de longitud *máximo*($n+1, m+1$), para almacenar las distancias cordales $|Q_{k,l} - Q_{k-1,l}|$, con $k = 1, \dots, n$, (análogamente para la dirección v), se calculan los parámetros \bar{u}_k y \bar{v}_l según la expresión (2.23), pero sin tener en cuenta las posibles filas o columnas de puntos degenerados (cuando la distancia cordal total es nula). El pseudocódigo del algoritmo para obtener las coordenadas paramétricas iniciales asociadas a cada punto de paso de la superficie, \bar{u}_k y \bar{v}_l , llamado *SurfMeshParams*, se muestra en la Figura 2.12, que toma como entradas el número de puntos menos uno en cada coordenada del espacio paramétrico, es decir, n, m , y los puntos, Q .

```
SurfMeshParams(n,m,Q,uk,vl){
    //Parámetros uk
    num=m+1 // Número de filas no degeneradas
    uk(0)=0.0
    uk(n)=1.0
    for (k=1, k<n, k++)u(k)=0.0
    for (l=0, l<=m, l++){
        total=0.0
        for (k=1, k<=n, k++){
            cds(k)=Distance3D(Q(k,l),Q(k-1,l))
            total=total+cds(k)
        }
        if(total==0) {
            num=num-1
        } else {
            d=0.0
            for(k=1, k<n, k++){
                d=d+cds(k)
                uk(k)=uk(k)+d/total
            }
        }
    }
}
```

```

if (num==0) return (error);
for(k=1, k<n, k++) uk(k)=uk(k)/num

//Parámetros vl
num=n+1 // Número de filas no degeneradas
vl(0)=0.0
vl(m)=1.0
for (l=1, l<m, l++)v(l)=0.0
for (l=0, l<=n, l++){
    total=0.0
    for (k=1, k<=m, k++){
        cds(k)=Distance3D(Q(l,k),Q(l,k-1))
        total=total+cds(k)
    }
    if(total==0) {
        num=num-1
    } else {
        d=0.0
        for(k=1, k<m, k++){
            d=d+cds(k)
            vl(k)=vl(k)+d/total
        }
    }
}
if (num==0) return (error);
for(k=1, k<m, k++) vl(k)=vl(k)/num
}

```

Figura 2.12: Algoritmo de extracción de parámetros para interpolación global de superficies.

Una vez calculados los parámetros \bar{u}_k y \bar{v}_l , se obtienen los vectores de nudos U y V siguiendo la ecuación (2.21).

Posteriormente, es posible calcular los puntos de control de la superficie a partir del sistema de $(n+1) \cdot (m+1)$ ecuaciones lineales (2.22), siendo las incógnitas a resolver $P_{i,j}$. No obstante, resulta más sencillo obtenerlos como una secuencia de interpolación de curvas, ya que $S(u, v)$ se puede expresar como una colección de productos tensoriales de curvas. Así, para un l dado, es posible rescribir la expresión (2.22) como la relación (2.24), sacando por separado un sumatorio, como indica la ecuación (2.25).

$$Q_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left(\sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) R_{i,l} \quad (2.24)$$

$$R_{i,l} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) P_{i,j} \quad (2.25)$$

Analizando la nueva expresión (2.24), se observa que es exactamente una interpolación a través de los puntos $Q_{k,l}$, con $k = 0, \dots, n$, en la que $R_{i,l}$ son los puntos de

control de la curva isoparamétrica en $S(u, v)$ para una v fijada en $v = \bar{v}_l$. Manteniendo i , y variando l entre 0 y m , la ecuación (2.25) resulta ser la interpolación de la curva a través de los puntos $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$, en la que $P_{i,0}, \dots, P_{i,m}$ son los puntos de control calculados. Con este punto de vista, y con la ayuda del ejemplo de la Figura 2.14, en el que se muestran los pasos para interpolar una superficie a partir de una malla de 4x3 puntos (Figura 2.14a) con grado 3 en u y 2 en v , el algoritmo de interpolación global de superficies para obtener todos los puntos de control $P_{i,j}$ de una superficie cualquiera, a partir de una malla de puntos de paso $Q_{k,l}$, se resume en dos pasos:

1. Usando \bar{u}_k y U , se interpolan $m + 1$ curvas sobre los puntos $Q_{0,l}, \dots, Q_{n,l}$ (para $l = 0, \dots, m$), consiguiendo así $R_{i,l}$. (Figura 2.14b)
2. Usando \bar{v}_l y V , se interpolan $n + 1$ curvas sobre los puntos $R_{i,0}, \dots, R_{i,m}$ (para $i = 0, \dots, n$), consiguiendo así $P_{i,j}$. (Figura 2.14c)

Así se obtienen todos los parámetros necesarios para interpolar la superficie correctamente. En la Figura 2.14d se muestra la superficie resultante del ejemplo propuesto, donde se han representado los puntos iniciales en color gris y los puntos de control obtenidos en color negro.

Para que este método sea correcto, es necesario hacer una pequeña modificación en la rutina de interpolación de curvas de la Figura 2.9 para que tome como entrada los \bar{u}_k y \bar{v}_l , ya obtenidos para el caso particular de superficies en la llamada a *SurfMeshParams*, y los vectores U y V calculados mediante la expresión (2.21). Finalmente, el algoritmo de interpolación global de superficies, llamado *GlobalSurfInterp*, queda resumido según el pseudocódigo de la Figura 2.13, tomando como entradas el número de puntos en u menos uno, n ; el número de puntos en v menos uno, m ; la matriz de puntos de paso, Q , el grado deseado en u , p , y el grado deseado en v , q ; y sus salidas son los vectores de nudos en cada dirección paramétrica, U y V , junto con la matriz de puntos de control P .

```
GlobalSurfInterp(n,m,Q,p,q,U,V,P) {
    SurfMeshParams(n,m,Q,uk,vl)
    calcular U según la ecuación (2.21)
    calcular V según la ecuación (2.21)
    r=3 // Cartesianas
    for (i=0, i<=m, i++){
        for (j=0, j<=n, j++){
            GlobalCurveInterp(n,Q(j,i),r,p,uk,U,R(j,i))
        }
    }
}
```

```

for (i=0, i<=n, i++){
  for (j=0, j<=m, j++){
    GlobalCurveInterp(m,R(i,j),r,q,vj,V,P(i,j))
  }
}

```

Figura 2.13: Algoritmo de extracción de parámetros para interpolación global de superficies.

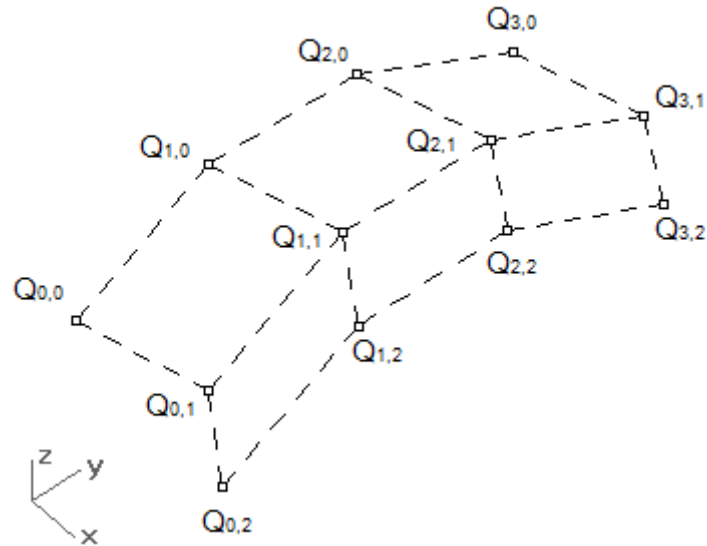


Figura 2.14a: Matriz de puntos de control a interpolar.

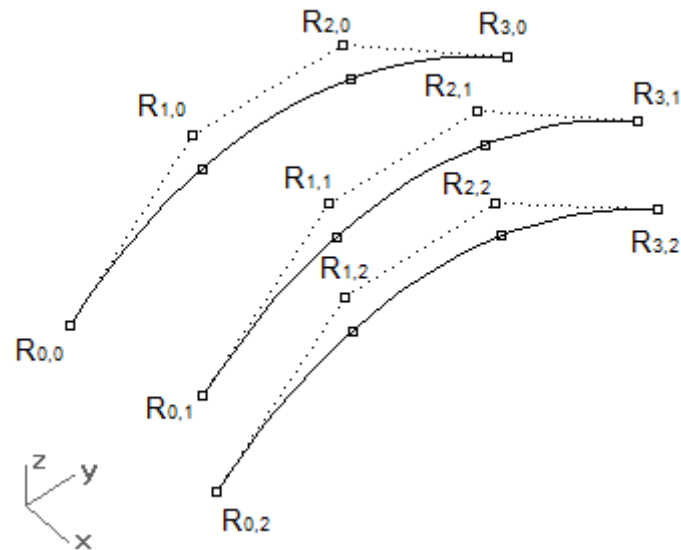


Figura 2.14b: Curvas interpoladas en la dirección u a partir de los puntos de paso y puntos de control asociados.

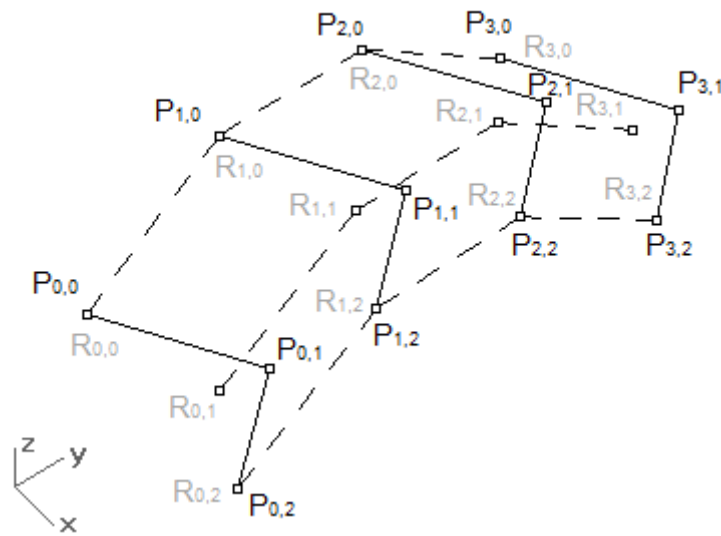


Figura 2.14c: Puntos de control obtenidos en v , resultantes de interpolar los puntos de control en u .

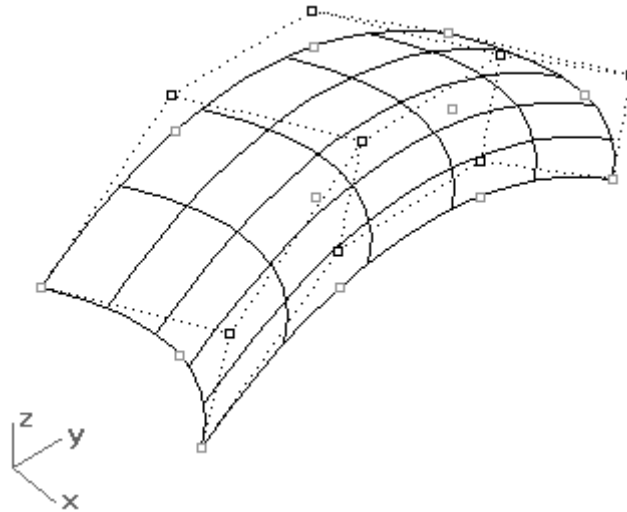


Figura 2.14d: Puntos de paso, puntos de control obtenidos, y superficie interpolada.

Figura 2.14: Ejemplo de Interpolación Global de una superficie paso a paso.

2.3.2. Curvas Recortadoras y Superficies Recortadas

Cuando se desea representar superficies con más de 4 curvas de contorno, agujeros interiores, o seleccionar únicamente ciertas regiones válidas sobre las superficies, se recurre a las superficies recortadas (*trimmed surfaces*, del inglés) por medio de curvas recortadoras.

Una superficie recortada es una NURBS normal, con su espacio paramétrico definido entre 0 y 1 para u y v , a la que se le aplican una serie de curvas recortadoras, que seccionan el espacio paramétrico original y modifican por tanto las regiones válidas de la superficie. La superficie recortada queda definida por uno o varios lazos que, según su sentido, indican la parte que se considera como válida en la superficie. Así, se habla de frontera exterior para el

lazo definido por las curvas más exteriores de la región de interés de la superficie recortada, que existe para cualquier superficie, y puede coincidir (completa o parcialmente) o no con los contornos originales de la misma. Se denotan como fronteras interiores a aquellos lazos que definen posibles agujeros en el interior de la superficie, y pueden no existir. El sentido del lazo exterior siempre coincide con el sentido definido por los contornos originales de la superficie, y el sentido de los lazos interiores siempre es opuesto al del lazo exterior. Por definición, no es posible definir nuevos lazos dentro de un lazo interior.

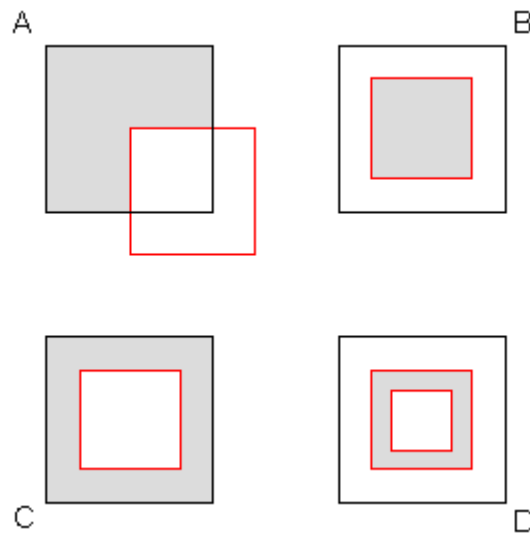


Figura 2.15: Ejemplos de superficies recortadas.

Para aclarar la utilidad de las curvas recortadoras mediante ejemplos, en la Figura 2.15 se representan cuatro casos distintos en los que se ha recortado una placa plana cuadrada. En negro se representan los contornos originales de la superficie, en rojo las curvas recortadoras, y en gris la región válida resultante al recortar la superficie.

- Caso A: Superficie recortada parcialmente con un único lazo, cuya frontera exterior queda redefinida al interseccionar el lazo externo original con la curva recortadora.
- Caso B: Superficie recortada con un único lazo frontera exterior, definido por una curva recortadora que cae dentro del espacio paramétrico de la superficie.
- Caso C: Superficie con dos lazos, el exterior se corresponde con la frontera exterior original de la superficie, y el interior viene definido por una curva recortadora contenida en el espacio paramétrico de la superficie.

- Caso D: Superficie con dos lazos, uno dentro del otro, y ambos definidos por curvas recortadoras contenidas dentro del espacio paramétrico de la superficie.

Con el uso de las superficies recortadas, se simplifica notablemente la representación de ciertas formas, al permitir seleccionar solo algunas partes de las superficies originales. A la hora de procesar este tipo de geometrías, la única consideración adicional es que solo hay que tener en cuenta la región delimitada por las curvas recortadoras.

2.4. FORMATOS GRÁFICOS

Existe una gran cantidad de formatos para exportar modelos geométricos: *IGES*, *DXF*, *STEP*, *3D Studio*, *ACIS*, *Parasolid*, etc. Generalmente, cada herramienta desarrolla su propio formato interno, pero la mayoría de ellas permiten importar y/o exportar algunos formatos comunes de gran utilidad, por estar estos estandarizados.

Entre los tipos de formatos de modelos geométricos disponibles, conviene diferenciarlos principalmente entre:

- Modelos de puntos de paso. Proporcionan únicamente los vectores o matrices de puntos de paso para curvas o superficies, respectivamente, y hay que obtener tras su lectura todos los parámetros que permiten definir completamente las curvas o superficies. Al cargar este tipo de formatos, es necesario emplear algoritmos como el de interpolación global vistos en la sección 2.3.1. Un ejemplo de este formato es el *DXF* [9].
- Modelos de superficies paramétricas. Trabajan directamente con curvas y superficies paramétricas, por lo que proporcionan todos los parámetros necesarios para poder cargar completamente sus modelos tras la lectura, sin necesitar algoritmos adicionales como el de interpolación global. Un ejemplo de este formato es el *IGES* [10].

Para comparar las diferencias entre los dos tipos de modelos geométricos, se toma como ejemplo el caso de la superficie representada en la Figura 2.16. En la parte izquierda se encuentra el caso del modelo de puntos sobre la superficie, que aunque visualmente están unidos por tramos rectos, al interpolarlos se obtiene una superficie curva. El resultado de la

interpolación de esos puntos es la superficie de la derecha de la figura, obtenida de un modelo de superficies paramétricas.

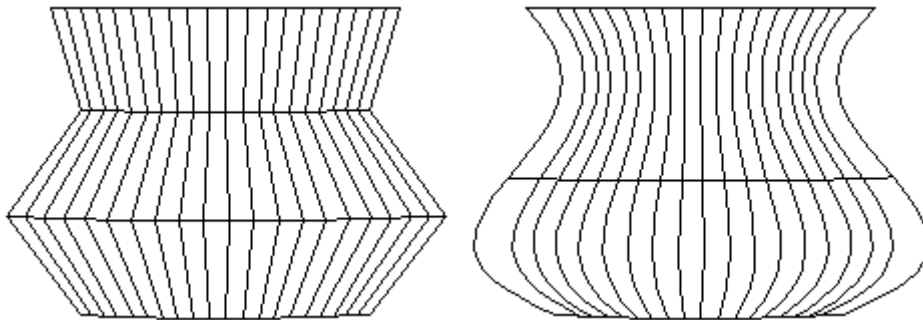


Figura 2.16: Ejemplo de superficie por puntos y superficie paramétrica.

A continuación, se resumen las principales características de los formatos *DXF* e *IGES* para el modelado de superficies, donde se usará como ejemplo la placa plana rectangular de la Figura 2.17 para contrastar ambos formatos.



Figura 2.17: Superficie plana rectangular.

2.4.1. Formato de puntos sobre superficies: *DXF*

Una de las herramientas más utilizadas en el mundo de CAGD es *AutoCAD*, desarrollado y comercializado por la empresa *Autodesk* [11]. Aunque su principal aplicación es el dibujo digital de planos o la recreación de imágenes 3D, también se usa comúnmente por ingenieros para modelar otro tipo de geometrías como pueden ser aviones o barcos.

Aunque *AutoCAD* cuenta con un formato propio, el *.dwg*, admite un formato abierto que se suele emplear para intercambiar geometrías con otras herramientas, el *.dxf*. El formato *DXF* es muy sencillo, especialmente para representar superficies en el ámbito que nos interesa.

Su principal característica es que no representa superficies como NURBS, si no que dispone de agrupaciones de puntos sobre superficies, recogidos en varios tipos de entidades. Las más comunes para representar superficies son [9]:

- Entidad *POLYLINE*. En la mayoría de casos, se trata de una malla compuesta por $n \cdot m$ puntos de paso, que pueden interpolarse con el algoritmo de interpolación global explicado en la sección 2.3.1.2. Para evitar oscilaciones indeseadas, generalmente el grado en cada dimensión paramétrica varía entre 1 y 3, en función de los puntos de paso en la correspondiente dirección del espacio paramétrico y de su distribución en el espacio cartesiano (alineados según rectas o no). Esta entidad tiene una variante en la que se representa una malla compuesta por un número concreto de puntos conectados entre sí a través de facetas planas, (cuadrangulares o triangulares), que son interpoladas siempre como NURBS de $2 \cdot 2$ puntos.
- Entidad *3DFACE*. Cada faceta plana viene dada independientemente del resto mediante 4 puntos esquina, por lo que se interpolan tantas NURBS de $2 \cdot 2$ puntos como facetas hay en el fichero. En el caso de modelar facetas triangulares, estas se caracterizan por tener 2 de los 4 puntos esquina coincidentes. Tomando como ejemplo el caso de la placa plana rectangular representada en la Figura 2.17, al modelarla en formato *DXF* con una entidad *3DFACE* se obtiene una parte del fichero de texto como la mostrada en la Figura 2.18, en la que se han omitido las partes de cabecera y otros detalles que no resultan de interés.

```
...
3DFACE
8
0
10
0.0
20
2.0
30
0.0
11
0.0
21
0.0
31
0.0
12
3.0
22
0.0
```

```

32
0.0
13
3.0
23
2.0
33
0.0
0
...

```

Figura 2.18: Placa rectangular modelada en DXF con una entidad 3DFACE.

A pesar de que este formato permite representar con gran precisión formas complejas, tiene una serie de limitaciones importantes que hacen que no sea el formato más adecuado en la mayoría de casos: independientemente del número de puntos que tengan las superficies en cada dirección del espacio paramétrico, su forma final siempre está limitada a 3 o 4 curvas de contorno. En realidad esta limitación es propia de las NURBS, pero otros formatos han evolucionado para permitir ciertas excepciones en la definición de las superficies, haciendo posible representar formas arbitrarias empleando las *superficies recortadas*, ya explicadas en la sección 2.3.2.

En la Figura 2.19 se representa el ejemplo de un satélite sencillo modelado en formato DXF. En concreto, este modelo geométrico está formado mayoritariamente por entidades 3DFACE, a excepción del reflector, que consta de 4 sectores de 90 grados cada uno, modelados mediante entidades POLYLINE.

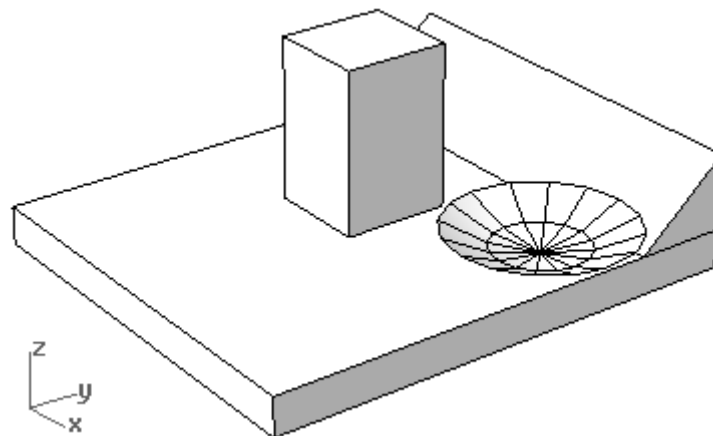


Figura 2.19: Satélite modelado en formato DXF.

2.4.2. Formato de superficies paramétricas: IGES

Actualmente, son muchos los formatos de CAGD que trabajan directamente con superficies recortadas, pero el más utilizado hasta la fecha es el .iges o .igs (Initial Graphics

Exchange Specification [10]). Por el contrario, hay herramientas que realizan una conversión de superficies recortadas a entidades simples (generalmente mallas), para trabajar con las mismas formas, pero pierden la referencia de las superficies originales y suelen introducir errores al perder detalles en la conversión.

El formato *IGES* se caracteriza por trabajar con superficies y curvas independientes, con la particularidad de que estas pueden estar relacionadas entre sí. Al igual que en el formato *DXF*, las distintas entidades se modelan mediante palabras clave, en *IGES* se distinguen por códigos numéricos, por ejemplo, una entidad 126 se corresponde con una curva racional B-Spline, una entidad 128 con una superficie racional B-Spline, etc. Concretamente, las entidades 143 y 144 sirven para representar las superficies recortadas [10]. En la Figura 2.20, se muestra la entidad de la superficie en el fichero de texto obtenido al exportar la placa plana rectangular de la Figura 2.17 en formato *IGES*.

```

...
128,1,1,1,1,0,0,1,0,0,0.0D0,0.0D0,3.0D0,3.0D0,0.0D0,0.0D0,2.0D0, 0000005P      3
2.0D0,1.0D0,1.0D0,1.0D0,1.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,3.0D0,0.0D0, 0000005P      4
0.0D0,0.0D0,2.0D0,0.0D0,3.0D0,2.0D0,0.0D0,0.0D0,3.0D0,0.0D0, 0000005P      5
2.0D0; 0000005P      6
...

```

Figura 2.20: Placa rectangular modelada en *IGES* con una entidad 128.

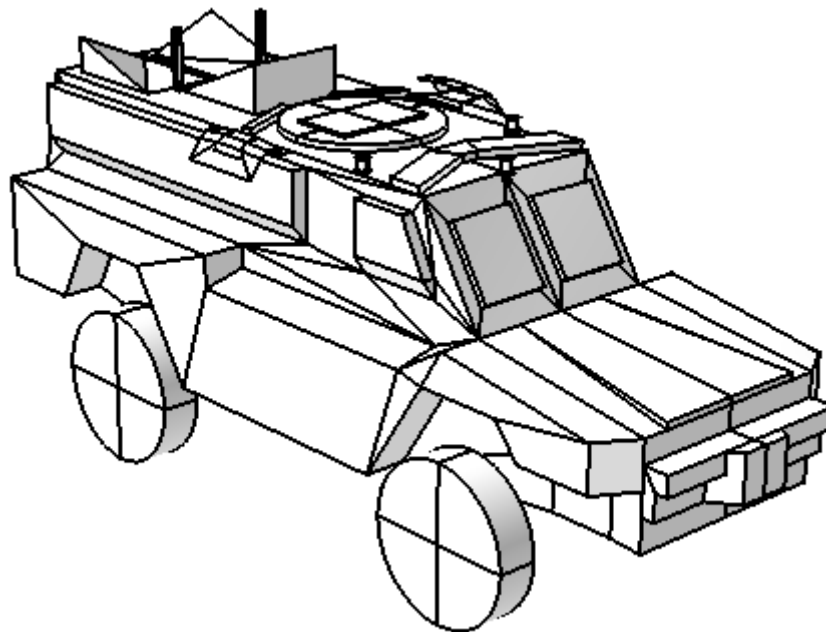


Figura 2.21: Vehículo blindado modelado en formato *IGES*.

El fichero del formato *IGES* se divide en 5 secciones, que no se detallan en este trabajo. Como resumen, omitiendo las secciones de cabeceras y detalles que no resultan de interés para el modelado geométrico, en una primera parte se describe la geometría como una serie

de entidades que se referencian entre sí cuando es necesario, para obtener todos los detalles de forma ordenada, y en otra parte se dan los detalles completos de cada entidad por separado. Así, por ejemplo, una superficie recortada se define como tal mediante una bandera que apunta a la entidad o entidades que la recortan, y por tanto, hay que cargar primero la descripción de su espacio paramétrico completo para, a continuación guardar correctamente la información de las curvas recortadoras aplicadas sobre la superficie.

En la Figura 2.21 se muestra el ejemplo de un vehículo blindado complejo modelado en formato *IGES* por 375 superficies paramétricas, algunas de ellas recortadas.

2.5. TRATAMIENTO DE LA GEOMETRÍA

El objetivo del trabajo desarrollado es adaptar las geometrías procedentes de ficheros de herramientas de CAGD a las necesidades específicas de diversos métodos de cálculo electromagnético. Esto se consigue mallando las geometrías de entrada con unas características concretas para cada método.

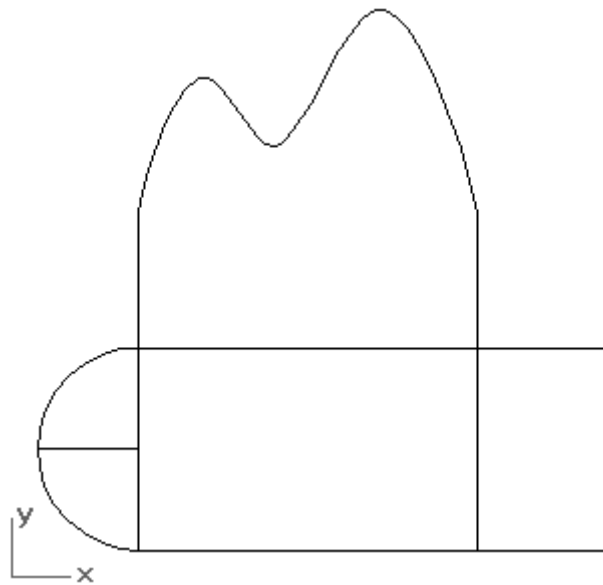


Figura 2.22: Geometría de referencia para comparar los criterios de mallado.

En esta sección, se introduce cada una de las técnicas para las que ha sido preparado el algoritmo de generación de mallas desarrollado, resaltando sus especificaciones de mallado. Todas las técnicas de simulación han sido verificadas y optimizadas en los últimos años,

convirtiéndose así en los núcleos electromagnéticos sobre los que trabaja la herramienta NewFasant [12].

Para comparar los diferentes criterios de mallado de cada núcleo de simulación sobre una misma geometría, se toma como referencia el ejemplo de la Figura 2.22, compuesto por 5 superficies planas con contornos rectos y curvos. Se ha escogido un caso bidimensional para facilitar la visualización, pero generalmente se trabaja con casos tridimensionales.

2.5.1. Método de los Momentos

2.5.1.1. Descripción

El Método de los Momentos es una de las técnicas numéricas más populares a la hora de analizar problemas de radiación y *scattering*, como por ejemplo, antenas embarcadas en estructuras conductoras. Se trata de una técnica rigurosa cuya formulación tiene en cuenta todos los efectos físicos posibles: campo directo, reflejado y difractado, difracción-reflexión, reflexión-difracción, ondas de superficie o *creeping waves*, etc. Se basa en la formulación integral de las ecuaciones de campo, donde las corrientes son las incógnitas a calcular, expresadas como un conjunto de funciones base que se pueden obtener con un sistema de ecuaciones lineales promediando una serie de funciones de prueba. Además, los resultados que proporciona son válidos tanto en Baja Frecuencia como en Alta Frecuencia. [13]

La idea principal del método es que dado un punto radiante, que genera un determinado campo eléctrico (puede ser debido a una distribución de corriente física o un punto eléctrico) sobre un cuerpo conductor (*Perfect Electric Conductor*, PEC), se estudian en primer lugar, las corrientes inducidas sobre el conductor, y una vez conocidas estas, el campo eléctrico en cualquier punto del espacio se calcula como la suma del campo procedente del elemento radiante más el campo dispersado por el objeto conductor. El problema completo viene descrito por una ecuación integral que relaciona la excitación con los campos producidos, a través de unas condiciones de contorno apropiadas. [14], [15]

La base matemática de las técnicas integrales es el teorema de equivalencia [13], por el cual se sustituye el medio original por el espacio libre, corrigiendo las corrientes y las condiciones de contorno para que los resultados finales sean correctos. Dependiendo de las condiciones de contorno, es posible distinguir tres tipos de problemas:

- Ecuación integral del campo eléctrico (*Electric Field Integral Equation*, EFIE), que aplica la condición de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico. Considera tanto potenciales debidos a corrientes como a cargas, siendo compleja de resolver.
- Ecuación integral del campo magnético (*Magnetic Field Integral Equation*, MFIE), basada en la condición de contorno que relaciona la componente tangencial del campo magnético con la densidad de corriente inducida. Esta ecuación tiene una formulación más sencilla y se resuelve más fácilmente, pero solo es válida para objetos cerrados.
- Ecuación integral de campo combinado (*Combined Field Integral Equation*, CFIE). Es una combinación lineal de las dos anteriores, y solo es válida para cuerpos cerrados, garantizando una solución única que se obtiene más rápidamente que aplicando EFIE o MFIE.

Una vez convertidas las magnitudes físicas que intervienen en el problema a expresiones matemáticas, la ecuación integral obtenida se resuelve numéricamente aplicando el MoM. Para ello, se transforma la ecuación integral en un sistema de ecuaciones algebraicas en el que se expresan las incógnitas como un conjunto de funciones base conocidas, ponderadas mediante coeficientes. Para resolver el sistema de ecuaciones resultante con el MoM, se recurre al uso de las denominadas funciones prueba, que se usan para promediar el sistema de ecuaciones en busca de una solución válida. No obstante, la resolución de este sistema resulta extremadamente compleja, y como alternativa, se suele recurrir a métodos iterativos, como el Método del Gradiente Conjugado, para resolver el problema permitiendo un pequeño error en la solución. [16]

Como ya se ha mencionado, el MoM se apoya en el uso de funciones base para discretizar el problema muestreando las incógnitas del sistema de ecuaciones, y en funciones de prueba que sirven para verificar que se cumplen las condiciones de contorno sobre determinadas zonas discretas de la estructura.

La discretización del modelo geométrico se lleva a cabo empleando el algoritmo de generación de mallas desarrollado. Sobre las mallas generadas, se toman como puntos de muestreo los puntos intermedios de los lados que comparten los elementos en contacto. Para obtener la corriente inducida, a cada uno de estos puntos, conocidos como subdominios, se le asocia una función base y una función de prueba. Tomando como ejemplo una placa plana

mallada con 16 elementos, se toman los 24 puntos de muestreo representados en la Figura 2.23.

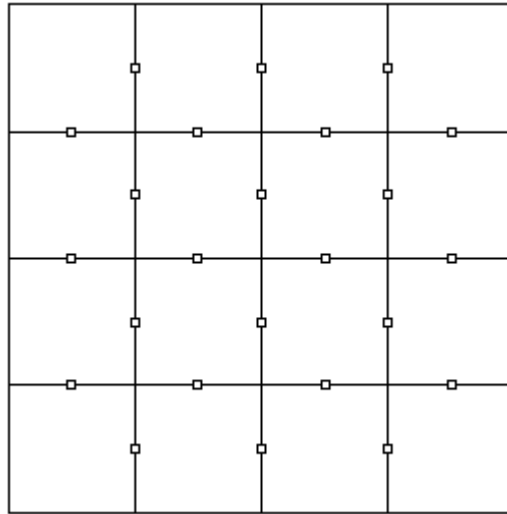


Figura 2.23: Puntos de muestreo para MoM en una placa plana.

El núcleo de MoM utilizado en esta tesis utiliza las que se conocen como funciones base de tejado o *rooftop*, que discretizan las corrientes como una combinación de funciones pulso y triángulo. Más concretamente, se trata de funciones *rooftop* sobre superficies paramétricas, de tal manera que las corrientes fluyen entre los elementos de la malla por el lado en contacto, siguiendo las líneas isoparamétricas de los mismos.

En cuanto a las funciones de prueba, se emplean para aproximar las condiciones de contorno sobre estructuras completamente arbitrarias, ya que estas condiciones únicamente se pueden aplicar de manera exacta cuando la forma de la geometría a analizar es canónica. Cuando se usan funciones base de tipo *rooftop*, lo más común es acompañarlas de funciones de prueba del tipo hoja de navaja o *razor-blade* [17], que promedian la ecuación integral en todos los lados de la estructura, distinguiendo entre el caso de la formulación EFIE o CFIE.

2.5.1.2. Criterios de mallado

Para que el núcleo de MoM se pueda aplicar adecuadamente, las mallas de entrada deben estar compuestas por elementos cuyo lado deseado sea función de la longitud de onda (λ). Como referencia para que los resultados sean fiables, se suele recomendar un número de divisiones por longitud de onda de en torno a 8, aunque se han conseguido resultados válidos en algunos casos usando elementos de tamaños comprendidos entre $\lambda/5$ y $\lambda/20$. El MoM deja de funcionar correctamente cuando se usan tamaños de elementos mayores de $\lambda/3$.

En la técnica de mallado desarrollada, se calcula el lado de los elementos a generar distinguiendo entre el caso de superficies curvadas o superficies planas, como indica la expresión (2.26). La mayoría de elementos (o todos, en algunos casos) de la malla son cuadrilaterales, aunque pueden aparecer algunos triangulares.

$$lado_{elemento} = \begin{cases} \frac{\lambda}{n^o \text{ divisiones}_{planas}} \text{ para sup. planas} \\ \frac{\lambda}{n^o \text{ divisiones}_{curvas}} \text{ para sup. curvas} \end{cases} \quad (2.26)$$

Una vez conocido el lado de elemento deseado para cada superficie, se dividen sus curvas de contorno en tantos tramos de tamaño $lado_{elemento}$ como sea necesario, insertando nodos (o puntos) de mallado sobre estas, para así poder generar la malla interior desde los nodos fijados. A medida que se insertan elementos en las superficies, es posible que las dimensiones de los mismos cambien suavemente, por lo que se recomienda controlar que se minimiza la diferencia de tamaños entre los elementos generados y el deseado, y así obtener mallas homogéneas.

Si se desea mallar la geometría de la Figura 2.22, por ejemplo, con una longitud de onda de 3 metros y unos factores $n^o \text{ divisiones}_{planas} = 2$ y $n^o \text{ divisiones}_{curvas} = 2$, se obtiene la distribución de 1.958 elementos representada en la Figura 2.24.

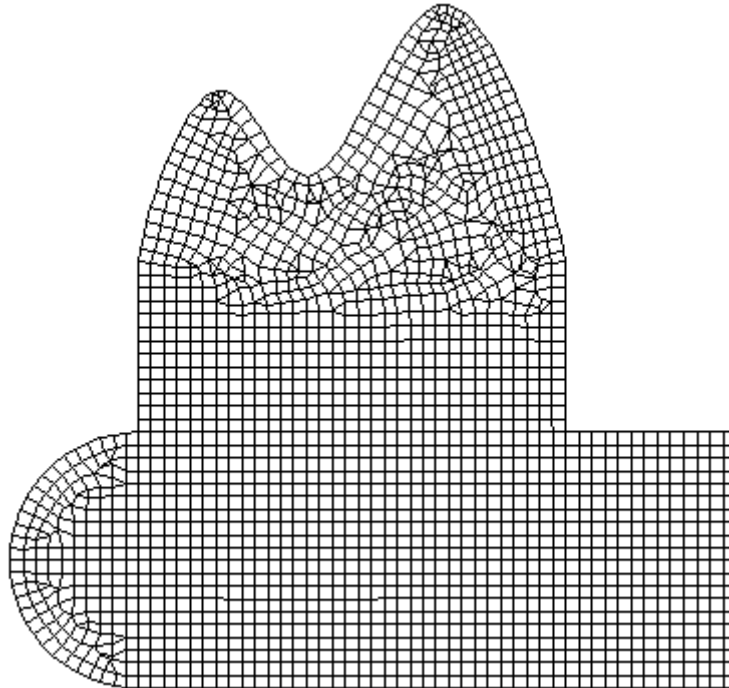


Figura 2.24: Geometría de ejemplo mallada con el criterio para MoM.

2.5.2. Óptica Física aplicada al cálculo de la Sección Radar

2.5.2.1. Óptica Física

Se trata de una técnica aproximada cuya precisión mejora cuando los objetos están desacoplados, es decir, son eléctricamente más grandes, de tal manera que es posible analizar cada uno por separado y sumar coherentemente la contribución de todas las partes. Además, los resultados mejoran cuanto mayor es el tamaño eléctrico de la estructura. [13]

Esta técnica asume que la energía se propaga a lo largo de trayectorias especiales denominadas rayos, de acuerdo con el principio de Fermat [18]. Los rayos reflejados y refractados se generan según la ley de Snell. Predice la dependencia del campo dispersado con la frecuencia, pero no tiene en cuenta las discontinuidades de los bordes de la geometría.

Las corrientes equivalentes, desconocidas en cada punto de la estructura conductora, se aproximan como las que aparecerían en un plano infinito tangente a la superficie en dicho punto cuando la superficie está directamente iluminada por el campo incidente, o cero en caso contrario. Según el tamaño eléctrico de la estructura, se distinguen dos casos distintos:

- Aproximación de difracción local de alta frecuencia. La corriente inducida sobre la superficie conductora, igual a la corriente equivalente, solo depende del campo incidente y del vector normal de la geometría en el punto en estudio.
- Aproximación de difracción local de baja frecuencia. La corriente inducida sobre la superficie conductora, igual a la corriente equivalente, también depende de la interacción entre distintos puntos de la superficie.

Su formulación matemática es extremadamente sencilla, ya que se basa únicamente en una integral bidimensional, por lo que su coste computacional es bajo en comparación con otras técnicas, y se convierte así en una de las soluciones más extendidas para analizar el fenómeno de reflexión en estructuras arbitrarias.

El campo calculado tiene las contribuciones de los puntos de reflexión especular, que son los puntos de fase estacionaria en los que el rayo fuente-superficie-observador recorre la distancia mínima, junto a las contribuciones de las corrientes en los límites de integración de la geometría, que vienen determinados por la transición entre zonas iluminadas con no iluminadas y por las aristas vivas de la geometría.

Los resultados de la óptica física son muy buenos cuando la principal contribución a los campos es la reflexión, como en grandes superficies, pero algunas de las suposiciones que toma hacen que el error cometido sea importante en otros casos. Tales limitaciones son:

- Como se aproximan las componentes tangenciales del campo por sus equivalentes sobre un plano infinito, al trabajar con geometrías con elementos curvados, el error cometido aumenta en los puntos en que el radio de curvatura sea menor que la longitud de onda.
- El fenómeno de difracción en aristas estimado no es bueno, ya que se comete un error al hacer la aproximación del plano infinito tangente. Este es el motivo por el que la óptica física no es fiable cuando hay contribuciones al campo total similares o mayores en magnitud a las del campo reflejado.
- Al suponer que la contribución de corrientes equivalentes es nula en las zonas de sombra de la geometría se comete otro error, ya que esto solo ocurre en casos muy específicos. Con esto, no se tiene en cuenta el efecto de las *creeping waves* u ondas de superficie, que se propagan por el cuerpo de la estructura y modifican el campo reflejado en la zona iluminada. Aunque la contribución de las *creeping waves* se puede omitir en algunos casos porque disminuye considerablemente con la frecuencia, conviene tenerlo en cuenta en geometrías compuestas por formas con curvaturas suaves. Este efecto si se tiene en cuenta en otros métodos como son la Teoría Geométrica de la Difracción (GTD), o la Teoría Uniforme de la Difracción (UTD), que no son de interés en esta tesis.

A pesar de estos inconvenientes, el error cometido con PO por los motivos expuestos, en muchos casos es insignificante por las características geométricas de las estructuras, la frecuencia de análisis o las distancias desde los elementos radiantes a los objetos radiados. En estos casos, conviene utilizar PO debido a su velocidad de análisis, mientras que en caso contrario es preferible emplear el MoM, que garantiza la fiabilidad de los resultados a pesar de su coste computacional.

2.5.2.2. Sección Radar

La Sección Radar (*Radar Cross Section*, RCS) es un parámetro utilizado principalmente para la identificación de objetos a largas distancias, así como su distancia, posición, velocidad o forma, que puede ser arbitraria. Se trata de la relación entre la potencia emitida y el campo

recibido por dispersión o *scattering*, y depende de los ángulos de incidencia y transmisión. También influyen otros factores como son la frecuencia, la forma, las dimensiones, la orientación o el material del que está construido el objeto en estudio.

El análisis de RCS resulta de especial interés para sectores como el militar, naval o aeronáutico, potenciando estos notablemente los estudios tanto a nivel teórico como práctico. Debido a la dificultad práctica y económica para estudiarlo con medidas, se recurre a su estimación mediante herramientas software como primer análisis. Como consecuencia de la complejidad de los blancos radar reales (barcos, aviones, vehículos blindados,...), el coste computacional de estas herramientas y los tiempos de CPU asociados al cálculo de la RCS aumentan notablemente, por lo que conviene utilizar algoritmos rápidos y eficientes. [19]

Se distinguen principalmente dos tipos de RCS: monoestática, cuando se usa una misma antena para transmitir la onda incidente y recibir la onda dispersada (coinciden la dirección de incidencia y la de *scattering*); o biestática cuando se usan antenas diferentes (direcciones distintas de incidencia y *scattering*).

El núcleo de cálculo de RCS empleado en este trabajo, analiza geometrías modeladas con superficies NURBS, de forma eficiente, mediante el método de alta frecuencia de Óptica Física considerando múltiples efectos. Es posible emplear PO ya que en general, se trabaja con distancias entre la antena transmisora y el blanco eléctricamente muy grandes y mayores que las dimensiones del blanco, por lo que se puede considerar que las distintas partes que componen el blanco radian independientemente entre sí, y calcular el campo total resultante como la suma de las diferentes contribuciones. Además, se trabaja en campo lejano, y tanto la onda incidente como la reflejada se aproximan por ondas planas.

El algoritmo se puede resumir en dos pasos: obtención de superficies y aristas que contribuyen al acoplo, como pueden ser reflexión, difracción, doble reflexión, etc.; y determinación de puntos visibles u ocultos para los rayos por alguna superficie o arista del modelo. El núcleo está dotado de técnicas de aceleración de trazado de rayos, como es el uso del algoritmo Z-Buffer angular [20] o el algoritmo de Particionamiento Espacial Volumétrico (SVP) [19], aplicados en el tratamiento de la ocultación de rayos para minimizar los tiempos de CPU en el cálculo de RCS. Para calcular las contribuciones, tiene en cuenta múltiples efectos, como la reflexión simple entre elementos de la malla, la difracción en las aristas rectas, la doble interacción entre parches planos y aristas y entre elementos planos y curvos, así como la triple interacción entre elementos planos y aristas rectas.

Para el caso del campo reflejado, la integral de PO se resuelve mediante dos formas distintas según la forma que tengan los elementos de la mallas: a través del Método de Gordon [21], cuando la contribución de corriente es constante y la variación de la fase es lineal a lo largo de la superficie; o con el Método de Fase Estacionaria [22], en caso contrario.

Ya se mencionó anteriormente que la PO original no tiene en cuenta la difracción por aristas, pero para el cálculo de RCS, se corrige este error añadiendo las contribuciones de corrientes de las aristas aplicando una aproximación PO-ECM¹. [23]

Los efectos de segundo y tercer orden se calculan combinando diversas técnicas sobre patrones sencillos según se ajusten al caso de interés, basándose principalmente en si se trata de elementos o aristas rectos o curvos. Así, además de los algoritmos ya conocidos de PO y el mencionado de ECM, se utilizan otros como son GO² o PTD³.

2.5.2.3. Criterios de mallado

Las mallas requeridas para aplicar al cálculo de RCS mediante PO tienen diferentes características a las de MoM. En este caso, el tamaño de los elementos en las superficies no es constante, ya que las curvas de contorno de cada superficie se procesan de forma independiente al resto, y por tanto, suele ocurrir que la separación entre los nodos insertados sobre distintas curvas de una misma superficie sea diferente. Esto se debe a que las curvas de contorno se procesan en función de sus dimensiones o sus curvaturas, y como consecuencia de esto los tamaños de los elementos generados son adaptativos. Además, la malla generada para analizar con RCS-PO también tiene la particularidad de estar compuesta únicamente por elementos triangulares planos.

A continuación, se explican los dos criterios empleados para calcular la separación entre los nodos situados en una determinada curva de contorno, denotada como $lado_{salida}$, para una longitud de curva concreta, $lado_{entrada}$.

- El primer criterio estudia longitud de la curva, para lo que se definen dos parámetros: uno que depende de la geometría total en estudio, $dimensión_{máxima}$, y se calcula como la dimensión mayor de la geometría en las tres dimensiones del

¹ Método de las corrientes equivalentes (*Equivalent Current Method*, ECM), que asume la existencia de unas corrientes equivalentes sobre las aristas que radian modelando el efecto de la difracción.

² Óptica Geométrica (*Geometrical Optics*, GO), que considera la propagación de energía como rayos que siguen el principio de Fermat, y sus interacciones cumplen la ley de Snell.

³ Teoría Física de la Difracción (*Physical Theory of Diffraction*, PTD), que tiene en cuenta la difracción en aristas que omite la PO, aunque solo es aplicable en determinados casos.

espacio real, siguiendo la expresión (2.27); y otro parámetro configurable, denominado $factor_{longitud}$, que suele tomar valores entre 1 y 20, siendo 10 su valor por defecto, y que determina el número máximo de divisiones en el que dividir la máxima dimensión de la geometría. Combinando estos dos parámetros, el criterio de longitud se calcula siguiendo la expresión (2.28), y determina la separación entre los nodos que se insertan en la curva de contorno.

$$dimensión_{máxima} = \text{máximo} \{ x_{max} - x_{min}, y_{max} - y, z_{max} - z_{min} \} \quad (2.27)$$

$$criterio_{longitud} = \frac{dimensión_{máxima}}{factor_{longitud}} \quad (2.28)$$

- El segundo criterio estudia la curvatura de las curvas de contorno. Para ello, se define un nuevo parámetro, denotado como $error_{curvatura}$, que indica la distancia máxima permitida entre la línea recta que une dos nodos consecutivos sobre la curva de contorno, y el punto situado sobre la curva de contorno original que se encuentra más alejado de dicha recta. El error de curvatura depende de un factor de entrada, llamado $factor_{curvatura}$, y de la longitud de onda de interés, tal y como se recoge en la relación (2.29). El factor de curvatura toma valores comprendidos entre 0,01 y 0,1 generalmente, empleándose por defecto 0,08.

$$error_{curvatura} = \lambda \cdot factor_{curvatura} \quad (2.29)$$

La separación entre nodos consecutivos de una curva de contorno curvada, es aquella que garantiza que el $error$ cometido al discretizar la curva por tramos rectos con dicha $distancia$ de separación, es siempre menor que $error_{curvatura}$ para toda la curva. El cálculo de este parámetro es adaptativo, y la solución final es la distancia máxima obtenida para una curva dada.

$$criterio_{curvatura} = \begin{cases} lado_{entrada} & \text{si } error_{entrada} \leq error_{curvatura} \\ \text{maximo}\{distancia_i \text{ con } error_i \leq error_{curvatura}\} & \text{si } error_{entrada} > error_{curvatura} \end{cases} \quad (2.30)$$

Llamando a la curvatura total de una curva de contorno $curvatura_{entrada}$, a la separación entre nodos resultante de aproximar la curva como un solo tramo recto $distancia_{entrada}$, y al error cometido por esta aproximación $error_{entrada}$, el criterio de curvatura, que determina la separación entre nodos consecutivos de la curva de contorno, se calcula iterativamente usando más tramos en cada iteración, i , hasta obtener un $error_i \leq error_{curvatura}$, según la relación (2.30).

Como ejemplo de la división por curvatura para PO-RCS, en la Figura 2.25 se muestra un arco con una $curvatura_{entrada} = 180^\circ$, en el que se trazan varias distancias de mallado, representadas mediante flechas de color negro, junto con sus errores asociados, representados en color gris. Dependiendo del valor de $error_{curvatura}$ deseado (se ha representado el de entrada y cuatro alternativas más), la distancia de mallado por curvatura, $criterio_{curvatura}$, será una u otra.

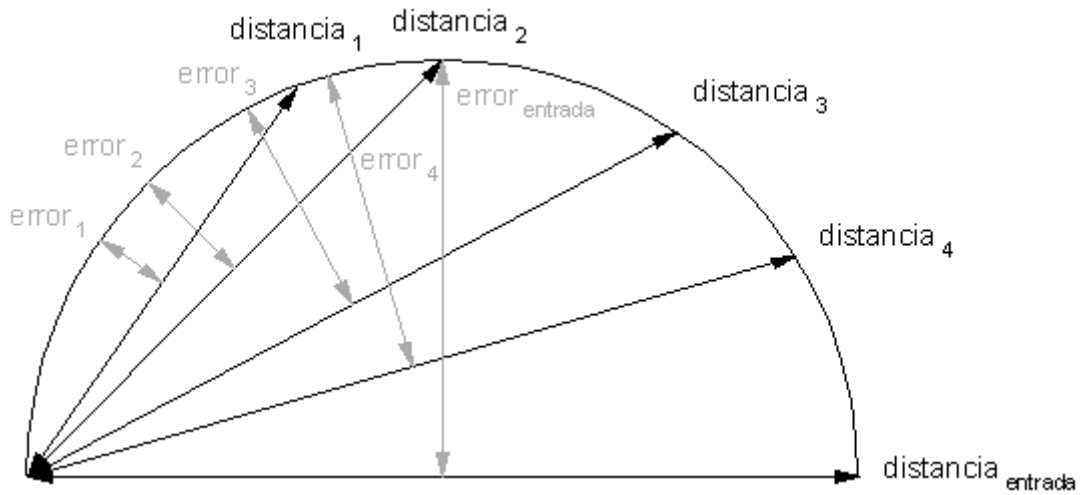


Figura 2.25: Criterio de división por curvatura para mallar con PO.

Una vez calculadas las separaciones entre los nodos de la curva de contorno según los criterios de longitud o curvatura, la separación definitiva entre los nodos situados en la curva de contorno de interés se calcula según la expresión (2.31).

$$lado_{salida} = \text{mínimo} \{ lado_{entrada}, criterio_{longitud}, criterio_{curvatura} \} \quad (2.31)$$

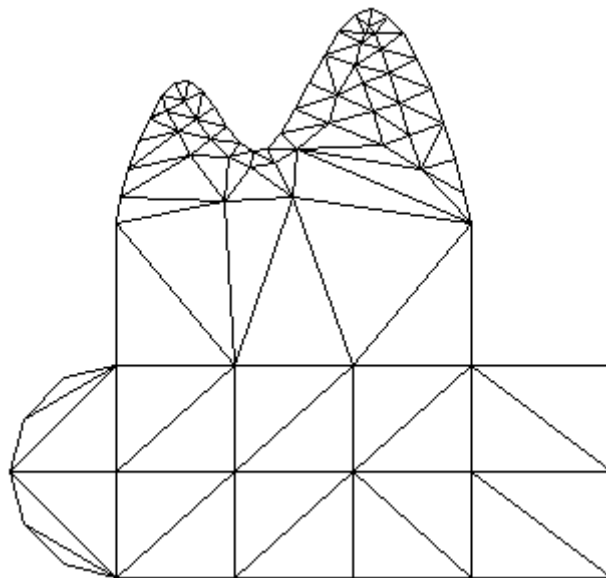


Figura 2.26: Geometría de ejemplo mallada con el criterio para PO.

Si se desea mallar el caso de la Figura 2.22, por ejemplo, con una longitud de onda de 0,25 metros, un $factor_{longitud} = 5$ y un $factor_{curvatura} = 0,08$, se obtiene la distribución de 109 elementos representada en la Figura 2.26.

2.6. REFERENCIAS

- [1] J. W. Crispin y A. L. Maffett, «Radar cross-section estimation for complex shapes», *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, nº 8, pp. 972-982, 1965.
- [2] P. Brunet y A. Vinacus, «Modelado Geométrico: Métodos y Aplicaciones», de *Seminario organizado por la Universidad de Cantabria*, Santander, 1990.
- [3] M. E. Mortenson, «Geometric Modelling», John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [4] M. Mantyla y R. Sulonen, «GWB: A solid modeller with Euler operators», *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 2, nº 7, pp. 17-34, 1982.
- [5] A. A. G. Requicha y H. B. Voelcker, «Solid modeling: current status and research directions», *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 3, nº 7, pp. 25-34, 1983.
- [6] I. González Diego, «Contribución a la Mejora de la GTD en la Predicción de los Sistemas Radiantes sobre Estructuras Complejas», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares, 2003.
- [7] L. A. Piegl y W. Tiller, «The NURBS Book», Berlín: Springer, 1997.
- [8] G. Farin, «Curved and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A practical Guide.», Orlando: Academic Press, 1996.
- [9] Autodesk, Inc., «Autocad 2009. DXF Reference», San Rafael, California, USA: Autodesk, Inc., 2008.
- [10] IGES/PDES Organization, «The Initial Graphics Exchange Specification (IGES) Version 6.0», 2001.
- [11] Autodesk, Autocad, [En línea]. Disponible: www.autodesk.es. [Último acceso: Julio 2012].
- [12] NewFasant, «NewFasant», [En línea]. Disponible: <http://www.fasant.com/>. [Último acceso: Diciembre 2012].
- [13] A. Cardama, L. Jofre, J. M. Rius, J. Romeu, S. Blanch y M. Ferrando, «Antenas», Barcelona, España: Edicions UPC, 2002.
- [14] E. García García, «Contribución al análisis de problemas electromagnéticos mediante el Método de los Momentos con bajo coste computacional», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares., 2005.
- [15] A. Tayebi, «Contribución al Desarrollo de una Interfaz Gráfica de Usuario para el Diseño, Optimización y Análisis de Antenas mediante el Método de los Momentos», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares., 2011.
- [16] M. R. Hestenes y E. Stiefel, «Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems», *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, nº 6, pp. 409-436, 1952.
- [17] A. W. Glisson y D. R. Wilton, «Simple and Efficient Numerical Methods for Problems of Electromagnetic Radiation and Scattering from Surfaces», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-28, nº 5, pp. 593-603, 1980.

- [18] G. A. Deschamps, «Ray Techniques in Electromagnetics», *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, nº 9, pp. 1022-1035, 1972.
- [19] L. L. Plata, «Desarrollo de Técnicas de Aceleración de Trazados de Rayos para la Reducción del Coste Computacional Asociado al Análisis de la Sección Recta Radar Utilizando Óptica Física», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares, 2006.
- [20] E. A. Hines y D. P. Greenberg, «The Light Buffer: A Shadow-Testing Accelerator», *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 6, nº 9, pp. 6-16, 1986.
- [21] W. B. Gordon, «Far-Field Approximation to the Kirchoff-Helmholtz Representation of Scattered Field», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-23, nº 4, pp. 590-592, 1975.
- [22] D. S. Jones y M. Kline, «Asymptotic Expansions of Multiple Integrals and the Method of the Stationary Phase,» *J. Math Phys.*, vol. 37, pp. 1-28, 1957.
- [23] M. Domingo, R. P. Torres y M. F. Cátedra, «Calculation of the RCS from Interaction of Edges and Facets», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-42, nº 6, pp. 885-888, 1994.

3. ALGORITMOS DE MALLADO DESARROLLADOS

3.1. INTRODUCCIÓN

A partir de una descripción matemática adecuada del modelo geométrico, se realiza el mallado del mismo, aplicando a cada parte que lo compone el criterio de mallado deseado. Esto es, se puede aplicar el mallado superficial a determinados objetos de una geometría (por ejemplo, un reflector), la aproximación dieléctrica de capa fina a otros (por ejemplo, un radomo), y el mallado volumétrico a los restantes (por ejemplo, la base maciza de un satélite).

Este capítulo recoge la parte más importante del trabajo realizado en la presente tesis, describiendo cada uno de los métodos de mallado desarrollados y enumerando los requisitos para que se puedan aplicar satisfactoriamente.

En primer lugar, se presenta el algoritmo de mallado superficial y los motivos para decantarse por el mismo. Con este método, se consigue discretizar el modelo geométrico en elementos sencillos y homogéneos que facilitan el análisis electromagnético sobre la geometría completa.

Una variante del mallado superficial, pero que se emplea como aproximación volumétrica en algunos casos, es la aproximación superficial dieléctrica de capa fina. Este método se basa en el procesado de la malla superficial generada de cada objeto cerrado, para generar a partir de ellas y hacia su interior, una serie de capas paralelas equidistantes.

Por último, se describe el proceso por el cual se generan mallas volumétricas a partir de modelos geométricos superficiales, es decir, partiendo de las cortezas externas de los cuerpos. Esta técnica presenta dos variantes, como se detallará más adelante: la primera de ellas consiste en aproximar la forma de los volúmenes como un conjunto de cubos perfectamente colocados y alineados entre sí; y la segunda técnica pretende unificar la aproximación de cubos internos con la corteza superficial de los objetos, para así cerrar completamente los cuerpos.

3.2. ALGORITMO DE MALLADO SUPERFICIAL

El mallado superficial consiste en discretizar el modelo geométrico original en elementos de forma simple (cuadrángulos o triángulos, por ejemplo), con una distribución lo más homogénea posible.

Como ya se ha mencionado en los capítulos previos, las mallas generadas con el método desarrollado se aplican a núcleos de cálculo electromagnético, por lo que deben cumplir una serie de requisitos que se resumen a continuación:

- El número de elementos en la malla está directamente relacionado con el número de incógnitas a analizar para el caso del Método de los Momentos (MoM) [1]- [2], teniendo en cuenta que solo se generan incógnitas en los lados de los elementos que están en contacto con otros. Para el caso de una malla de elementos cuadrangulares, se generan 4 incógnitas para cada elemento, pero como los bordes de diferentes elementos en contacto comparten la misma incógnita, el número máximo total de incógnitas aproximado es el doble de elementos. En la malla de elementos triangulares, para cada elemento aparecen 3 incógnitas, y de nuevo, como los bordes de diferentes elementos en contacto comparten la misma incógnita, el número máximo total de incógnitas aproximado es el doble de elementos, pero este a su vez es del doble que para la malla de cuadrángulos.

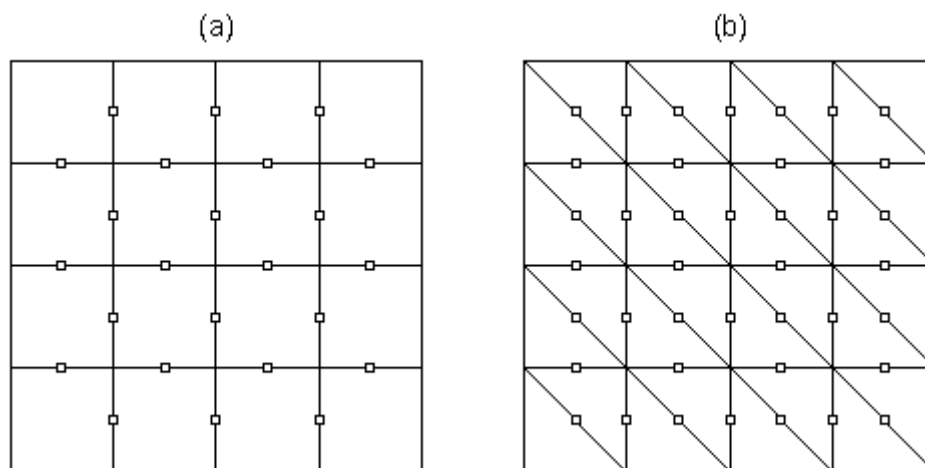


Figura 3.1: Comparativa entre el número de incógnitas en una malla de cuadrados (a) y de triángulos (b).

En la Figura 3.1 se representan como puntos las incógnitas necesarias para analizar con el MoM una placa plana mallada con 16 elementos cuadrangulares (a), donde se tienen 24 incógnitas, o con elementos triangulares (b), con 40 incógnitas. En

este ejemplo, se observa que por cada dos elementos triangulares, se genera una incógnita más que para su elemento cuadrangular equivalente, y el número de incógnitas totales en la malla de elementos triangulares es casi del doble que en la de elementos cuadrangulares.

- Conviene evitar la aparición de puntos degenerados, es decir, aquellos que forman parte de muchos elementos. En un caso ideal, en cada punto que forma la malla deben desembocar exactamente tantos elementos como lados tengan los mismos: cuatro elementos por punto para una malla cuadrangular, o tres elementos por punto para una malla triangular.
- La malla debe respetar fielmente las formas de la geometría original. En geometrías compuestas por superficies planas, esto no supone problema alguno. Sin embargo, cuando hay superficies curvadas como es en el caso de cilindros, esferas, conos, ... los elementos de la malla deben respetar las curvaturas de las superficies originales.
- Es necesaria la homogeneidad en los elementos que forman la malla, por lo que no conviene la presencia de elementos extremadamente deformados o con un ratio de tamaño de sus lados demasiado grande o pequeño con respecto a sus vecinos.
- No deben aparecer discontinuidades eléctricas entre los elementos en contacto que formen la malla, siendo este un requisito crítico para métodos que trabajan con corrientes como es el caso del MoM. Con esto, se consigue una malla de salida fiable y fácil de procesar.

Para que no se dispare el número de incógnitas, hay que mantener un equilibrio entre calidad y eficiencia, por lo que se escoge la generación de mallas compuestas por elementos cuadrangulares para reducir el número de incógnitas frente a las de elementos triangulares. Además, las mallas estructuradas minimizan la aparición de puntos degenerados en las mismas, por lo que resultan óptimas para los requisitos indicados anteriormente.

Los elementos de la malla se generan como cuadrángulos simples compuestos por cuatro puntos esquina. No obstante, para evitar que se discreticen las torsiones o curvaturas de la geometría, al finalizar el mallado, se inserta una serie de puntos de control (contenidos en la geometría original) entre las cuatro esquinas de los elementos, convirtiendo así cada parche, inicialmente modelado como una malla de 2x2 puntos, en una malla de 3x3 puntos,

que pueden ser interpolados como superficies de Bézier [3] y que permiten representar con precisión las curvaturas originales. Para aclarar el proceso, se representan en la Figura 3.2, numeradas de 1 a 4, las esquinas del elemento con las que se trabaja durante el proceso de mallado, y numerados de 5 a 9, los puntos de control adicionales insertados al finalizar el mallado para optimizar la resolución. Como ejemplo, en la Figura 3.3 se muestra en color verde, el contorno de un sector de un cuarto de cilindro; en color rojo, uno de los elementos generados durante el mallado, formado únicamente por cuatro esquinas (los puntos negros) y que no respeta la forma cilíndrica de la geometría original; y en color azul, el parche de Bézier resultante de interpolar la malla de 3x3 puntos que si está contenido en una porción real de la superficie inicial. Con esto, también se reducen significativamente el número de incógnitas a analizar con respecto a las mallas compuestas por elementos planos, ya que se consigue una representación fiel de la geometría original pero con una resolución de mallado mucho menor que si se emplean únicamente elementos planos.

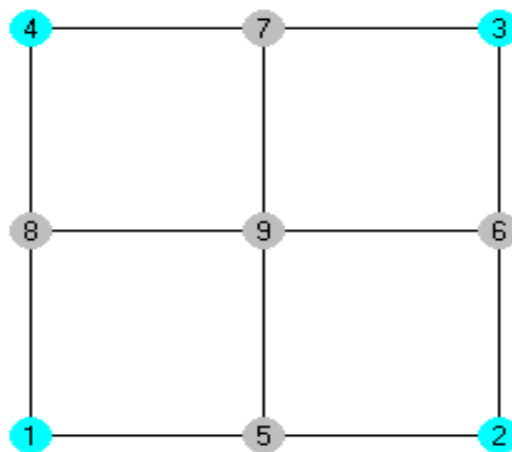


Figura 3.2: Puntos de control de un elemento

Se permite una excepción en la generación de elementos cuadrangulares, al insertar elementos triangulares en casos puntuales que sirven para suavizar la transición de tamaños o formas entre elementos, garantizando así, junto con otras etapas de suavizado y mejora de calidad que se detallarán más adelante, que la malla resultante tiene una distribución lo más homogénea posible.

Las técnicas de mallado de avance progresivo consisten en la generación de elementos de forma evolutiva, partiendo de una frontera inicial de puntos en los contornos de la superficie original hasta completar el mallado interior, y garantizan que la malla generada es continua en todo su dominio. Estos métodos proporcionan elementos de alta calidad en las regiones próximas a los contornos de las superficies.

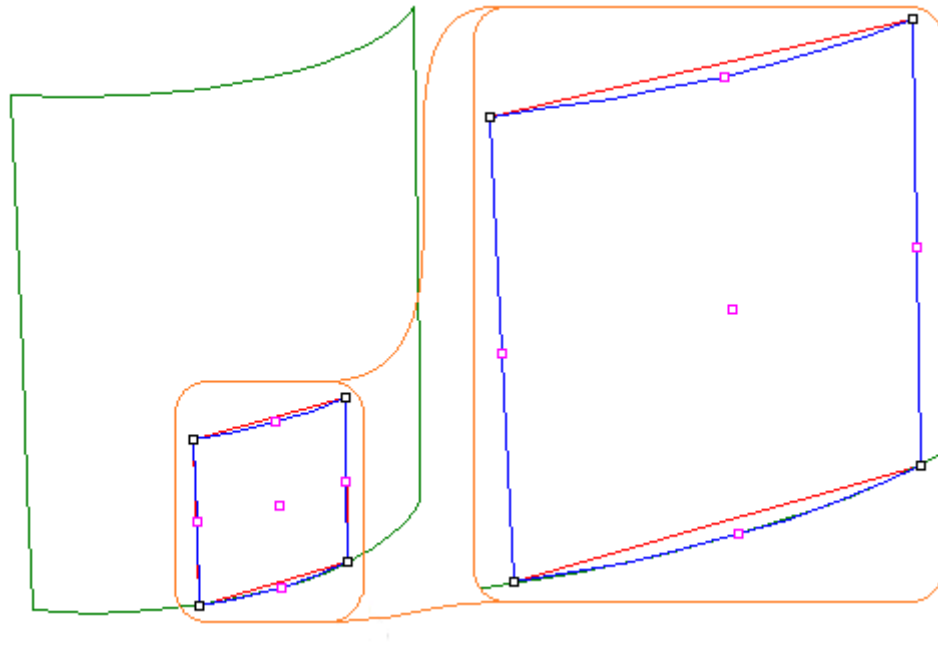


Figura 3.3: Sector cilíndrico original, mallado e interpolado.

La continuidad en la malla de salida se modela con el indexado en los puntos que comparten los elementos en contacto, haciendo que los puntos coincidentes tengan el mismo índice. Así, se agiliza la detección de continuidades en el procesamiento posterior de la malla. Para aclarar el modelado de la continuidad en la malla de salida, en la Figura 3.4 se representa una malla compuesta por dos elementos en contacto, donde se han numerado los puntos que la componen de diferentes formas: los puntos esquina de cada elemento y los elementos cuadrangulares se muestran en color negro, mientras que los puntos de control finales en color fucsia; en color azul se identifica la numeración continua de los puntos, teniendo así los que se comparten entre los elementos con un único índice; y en color rojo se muestra la alternativa de numeración discontinua, que conlleva que los puntos compartidos por los elementos en contacto tengan tantos índices como elementos los contienen (en este caso serían dos índices), resaltando en color verde el segundo índice de los mismos para distinguirlos con más claridad. Con esto, se deduce que también se reduce el tamaño del fichero de salida al eliminar la redundancia, pasando de tener 18 puntos en la malla discontinua a 15 en la continua (reducción al 83 por ciento) . A medida que aumente el número de elementos, este porcentaje de reducción en el número de puntos tiende a minimizarse de forma significativa. Por ejemplo, se pasa de 36 a 25 puntos en el caso de 4 elementos distribuidos como una tabla de 2x2 (reducción al 69 por ciento); de 144 a 80 en el caso de 16 elementos distribuidos como una tabla de 4x4 (reducción al 56 por ciento); y de 576 a 284 en el caso de 64 elementos distribuidos como una tabla de 8x8 (reducción al 49 por ciento). A medida que varía la forma de la geometría, y por tanto, la distribución de los

elementos en la malla, los porcentajes de reducción de puntos serán algo mayores que los ideales.

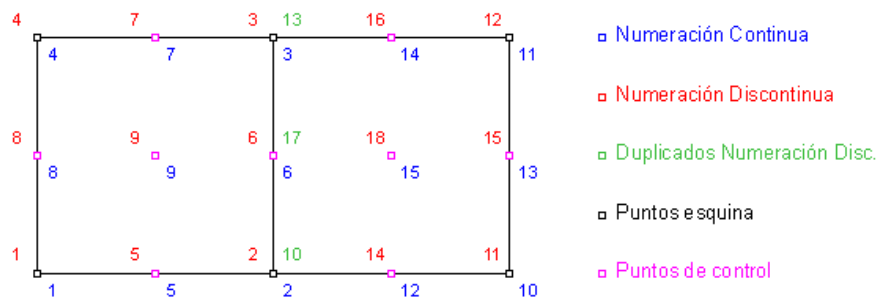


Figura 3.4: Modelado de la continuidad en la malla.

El algoritmo de *paving* o enladrillado [4] cumple todos los requisitos necesarios, al ser una técnica de mallado progresivo que trabaja con elementos cuadrangulares y permite conseguir mallas altamente estructuradas y continuas. Añadiendo ciertas etapas adicionales, se garantiza que la malla de salida contiene los puntos de control que mejoran el nivel de detalle de la malla.

3.2.1. Algoritmo de paving

La técnica de mallado de *paving* surge como un algoritmo heurístico capaz de mallar con elementos cuadrilaterales geometrías arbitrarias en dos dimensiones únicamente [4], y posteriormente se extiende a geometrías arbitrarias en tres dimensiones [5]. Se trata de un mallado adaptativo, en el sentido de que se consigue una transición suave entre el tamaño de elemento deseado en las fronteras de las superficies a mallar, y el tamaño deseado en la región interior de las mismas. Las mallas generadas son altamente estructuradas y están bien construidas, es decir, la mayoría de los elementos son muy próximos a cuadrados perfectos, y perpendiculares a las fronteras de las superficies. Además, las mallas se adaptan a las geometrías originales, es decir, los contornos de las mallas respetan las formas de los contornos de las fronteras de las superficies de entrada.

3.2.1.1. Visión general del algoritmo

La técnica de *paving* se basa en la generación iterativa de filas de elementos hacia el interior de las regiones delimitadas por las fronteras de las superficies (o de unas fronteras a otras, para el caso de superficies con agujeros) hasta completar todas las regiones a mallar. A medida que se insertan filas de elementos, pueden producirse intersecciones con las filas existentes, conectándolas adecuadamente para mantener la calidad de la malla y evitar

solapamientos. En la Figura 3.5 se muestra el proceso de mallado de una placa plana cuadrada siguiendo el algoritmo de *paving*, donde se observa la transición de la superficie original a la malla resultante de izquierda a derecha, insertando elementos de uno en uno.

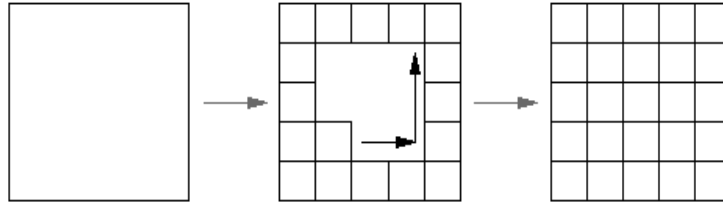


Figura 3.5: Proceso de mallado de una placa plana cuadrada.

A partir de ahora, se hablará de nodos para referirse a los puntos que forman la malla, y de lazos como cada una de las secuencias cerradas de nodos conectados que forman las fronteras que delimitan la región restante a mallar.

Antes de comenzar a mallar, se generan los lazos iniciales en las fronteras originales de las superficies, llamados lazos frontera, y sus nodos están fijados y no pueden moverse en ningún caso durante el proceso de mallado, de ahí que se les denomine nodos frontera. Los nodos frontera garantizan que se mantiene la continuidad entre regiones en contacto.

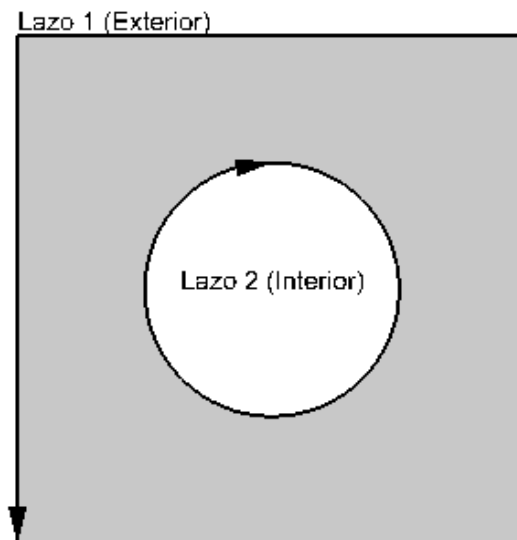


Figura 3.6: Superficie de dos lazos.

Se distinguen los lazos frontera como interiores o exteriores. Cualquier región a mallar tiene siempre un lazo frontera exterior, cuyos nodos se deben ordenar en un sentido concreto para que el mallado se haga hacia dentro de la región delimitada por el lazo exterior. Los lazos frontera interiores aparecen en aquellas regiones que contienen agujeros internos, y sus nodos se ordenan en sentido contrario al de los lazos exteriores. Un ejemplo de superficie con varios

lazos, junto con sus sentidos de mallado indicados con flechas, es el de la placa plana cuadrada con un agujero circular representada en la Figura 3.6, donde se ha resaltado la región a mallar en gris.

Los nodos que delimitan la frontera a mallar en cada momento forman los lazos de mallado, que inicialmente coinciden con los lazos frontera. A medida que se insertan nuevos elementos se actualizan los lazos de mallado, pudiendo cambiar tanto el número de lazos de mallado como los nodos que los componen. Todos los nodos de los lazos de mallado que no son frontera pueden verse desplazados, combinados o eliminados para mantener la calidad de la malla. También los lazos de mallado pueden ser exteriores, teniendo siempre un sentido de mallado contrario al de los lazos interiores.

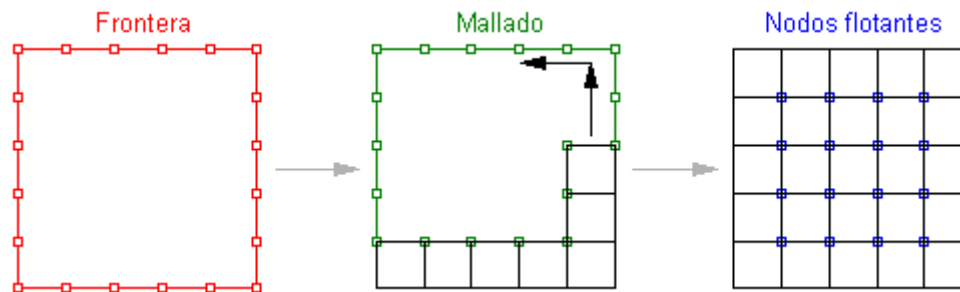


Figura 3.7: Clasificación de los nodos según su posición.

Los nodos de la malla se clasifican en tres grupos desde el punto de vista de la posición en la misma. Como se ha explicado anteriormente, los nodos frontera son los fijados en las fronteras de las superficies originales; por el contrario, todos los nodos que no son frontera se llaman nodos flotantes o variables, ya que están sujetos a posibles modificaciones. Por último, se llaman nodos de mallado a todos aquellos que se encuentran en algún lazo de mallado, pudiendo ser a su vez nodos frontera o nodos flotantes. Los tres tipos de nodos se representan en ejemplo de la Figura 3.7. Adicionalmente, se hace otra clasificación de los nodos de mallado en función de sus ángulos interiores en la frontera de mallado con respecto a sus nodos de mallado vecinos, que se detalla en la sección 3.2.1.2.

Para que una determinada región se pueda mallar solo con elementos cuadrilaterales, es condición necesaria que tenga un número par de nodos en cada uno de sus lazos frontera, debiéndose mantener esta restricción durante todo el proceso en los lazos de mallado.

El tamaño de los elementos a generar en una determinada región viene condicionado principalmente por la separación entre nodos adyacentes de los lazos de mallado (aunque también influyen otros factores, como sus ángulos), por lo que en general, el tamaño de lado

deseado para los elementos es la separación prefijada entre nodos frontera. No obstante, la separación entre los nodos depende de la longitud de las curvas de contorno de la superficie sobre la que se encuentran, por lo que en la mayoría de casos, no es idéntica entre todos los nodos de un mismo lazo frontera.

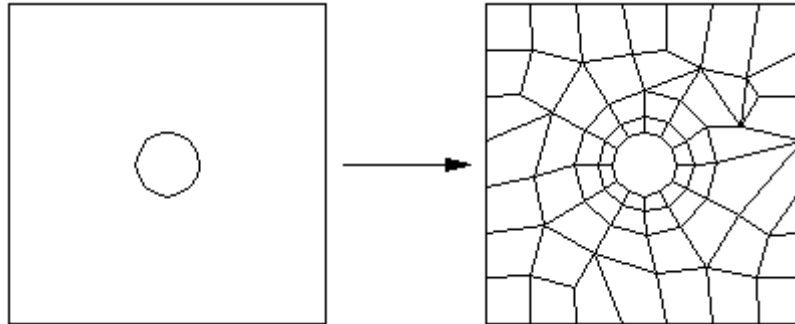


Figura 3.8: Superficie con un lazo interior pequeño.

En la parte izquierda de la Figura 3.8 se representa una placa plana de 1 metro de lado con un agujero interior circular en el centro, de radio 0,1 m. El lazo interior tiene una longitud total de 62,84 cm., y se ha modelado con 12 arcos de 5,24 cm. para que esté compuesto por una serie de curvas pequeñas en comparación con las dimensiones de la superficie. Se ha mallado la superficie con un tamaño deseado de elementos de 15 cm., como se muestra en la parte derecha de la figura¹. Es importante controlar la transición de tamaños de los elementos generados, por lo que se suele especificar un tamaño deseado de lado de elementos en cada región, y a medida que se generan filas de elementos se trata de aproximar (o mantener) paulatinamente la separación entre los nodos adyacentes en los lazos de mallado a dicho tamaño. Así, se consigue una distribución suave del tamaño y la forma de los elementos generados.

El funcionamiento general del algoritmo, queda resumido en el diagrama de flujo de la Figura 3.9, cuyas etapas principales son:

1. *Generación de nodos frontera (fixed nodes insertion)*. Antes de comenzar a mallar, se insertan los nodos en las fronteras originales que componen la geometría.
2. *Selección de fila (row choice)*. Hay que escoger el lazo mejor y su nodo más adecuado para comenzar a generar elementos en la fila.

¹ Aunque en esta sección se habla de mallas de elementos cuadriláteros, la versión del mallador desarrollada genera elementos triangulares en algunas ocasiones, como se observa en la Figura 3.8. La aparición de triángulos se explicará más adelante.

3. *Generación de fila (row generation)*. Se insertan incrementalmente elementos en la fila seleccionada en el paso 1 hasta completarla, o hasta que se produce alguna intersección entre el último elemento generado y las fronteras de mallado existentes.
4. *Tratamiento de intersecciones (intersection check)*. Después de generar nuevos elementos (o modificar los ya existentes), hay que comprobar si se han producido intersecciones entre los elementos y los lazos de mallado. Cuando esto ocurre, hay que resolver las intersecciones, normalmente conectando o separando las fronteras de mallado implicadas.
5. *Comprobación del cierre (closure check)*. Se comprueba si hay lazos de mallado con 6 nodos o menos, y en caso afirmativo, se identifican sus formas entre una colección predefinida de primitivas, para cerrarlos con el patrón que mejor se ajuste a cada caso.
6. *Suavizado de frontera (smooth boundary)*. Cada vez que se detiene la generación de elementos en una fila, es necesario ajustar sus nodos flotantes para mantener la calidad y la uniformidad de las fronteras existentes, y por tanto, de los próximos elementos a insertar.
7. *Cosido de frontera (seaming boundary)*. Después del suavizado, se eliminan los nodos del lazo de mallado que tienen ángulos interiores demasiado pequeños (se consideran pequeños aquellos ángulos menores que un cierto valor límite predefinido), cosiéndolos o cerrándolos al conectar elementos vecinos u opuestos.
8. *Ajuste de filas (row adjust)*. El objetivo de esta etapa es hacer pliegues o porciones, dentro de la última fila de elementos generada, para corregir los elementos que se consideran demasiado grandes o pequeños.
9. *Limpieza final (clean-up)*. Al finalizar el mallado completo de una región, se revisan todos los elementos generados para editar, eliminar o añadir aquellos que no cumplen ciertos criterios de calidad, mejorando así la calidad de la malla final.

A continuación, se explican con más detalle las principales etapas del algoritmo.

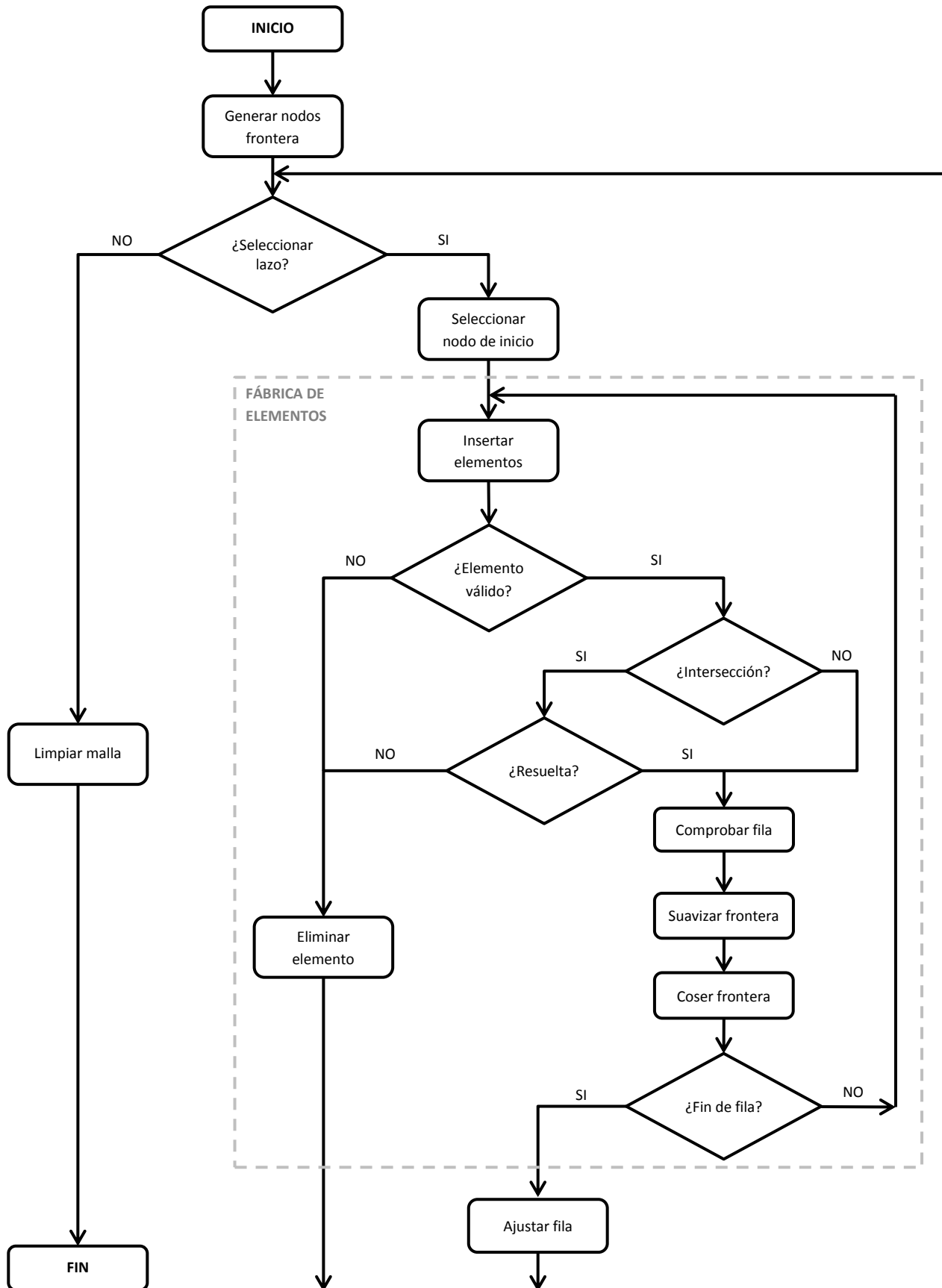


Figura 3.9: Diagrama de flujo del algoritmo de mallado.

3.2.1.2. Clasificación de los nodos según su ángulo

Cada nodo de los lazos de mallado se caracteriza por una clasificación basada en el ángulo α que tiene con respecto a sus dos nodos adyacentes, interpretándose siempre como el ángulo que hay que recorrer para ir desde el nodo anterior hacia el siguiente, según el sentido de la frontera, moviéndose por la región a mallar. En la Figura 3.10 se muestran los ángulos internos de tres nodos en uno de los pasos del mallado de la placa plana representados en la Figura 3.7, donde el sentido del lazo de mallado es antihorario y los ángulos son $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$ y $\alpha_3 = 270^\circ$.

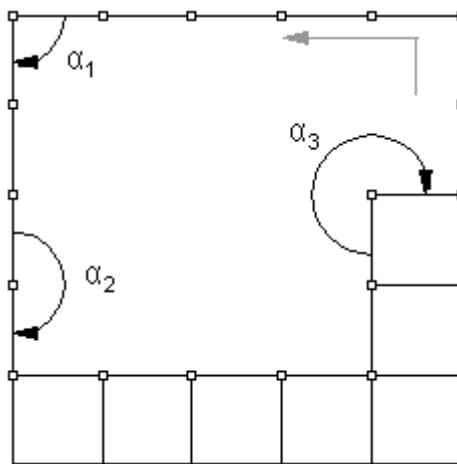


Figura 3.10: Ángulos internos en los nodos de mallado.

Para calcular los ángulos de los nodos que forman la frontera de mallado en superficies arbitrarias, es necesario hacer una proyección de los nodos que intervienen en el ángulo sobre un plano local que minimice el error cometido al pasar de un caso tridimensional a uno bidimensional. Se realizan tantas proyecciones como nodos hay en la frontera de mallado, ya que el plano de proyección es siempre local al nodo sobre el que se calcula el ángulo, y se obtiene en función de las derivadas paramétricas y la normal de la superficie original en ese punto. La curvatura descrita por la superficie original entre los nodos implicados en un determinado ángulo condiciona notablemente la precisión del ángulo obtenido, por lo que se ha habilitado una opción de preprocesado que controla la máxima curvatura permitida entre los nodos frontera.

En la Figura 3.11 se representan los nodos frontera situados sobre los contornos de una superficie curva y los ejes cartesianos, en color negro. Tomando tres nodos consecutivos como ejemplo, N_{i-1} , N_i y N_{i+1} , se muestra también el sistema de referencia auxiliar necesario para proyectar desde el nodo N_i , junto con el plano local resultante y los nodos proyectados

sobre el mismo, en color gris. Una vez transformado el problema al caso bidimensional con N'_{i-1} , N'_i , y N'_{i+1} , se calcula el ángulo interior de N_i , α_i .

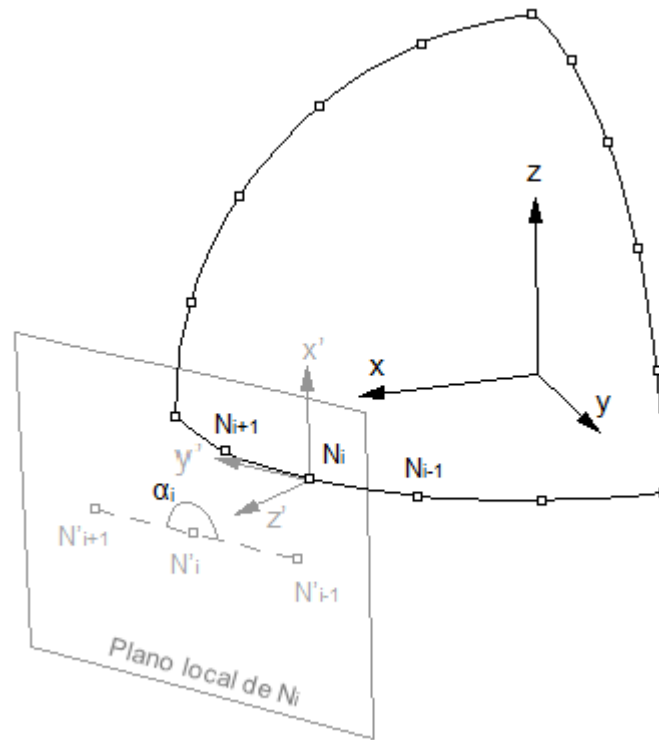


Figura 3.11: Proyección local para el cálculo del ángulo de un nodo.

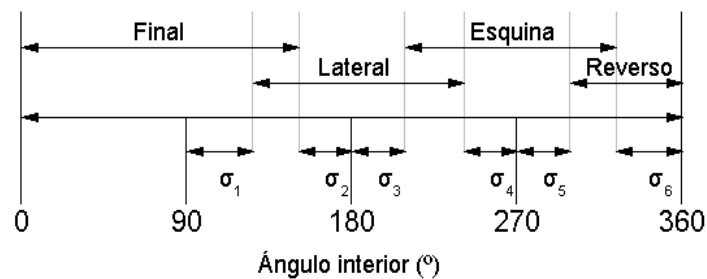


Figura 3.12: Clasificación de nodos según su ángulo interior en la frontera.

Según el ángulo interior de los nodos, estos se clasifican en cuatro grupos principalmente, aunque se considera un conjunto de tolerancias angulares $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6$ que representa una desviación permisible para clasificar los nodos como un tipo u otro. Así, se tienen cuatro grupos claramente diferenciados: final, lateral, esquina y reverso; y tres grupos considerados como ambiguos: ambiguo final/lateral, ambiguo lateral/esquina y ambiguo esquina/reverso. En la Figura 3.12 se representan los cuatro grupos principales, que al solaparse entre sí forman los tres grupos ambiguos. Dependiendo del grupo al que pertenecen los nodos, los elementos se generan de una forma u otra.

A continuación, se describen las características de cada uno de los siete grupos de nodos posibles:

- *Final de fila o Tipo 1.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre 0° y $90+\sigma_1^\circ$. Suelen ser los nodos en los que termina una fila, por lo que solo se genera un elemento desde ellos y no es necesario insertar nuevos nodos. Según el ejemplo de la Figura 3.10, el nodo con ángulo α_1 se clasifica como final.
- *Ambiguo final/lateral de fila o Tipo 2.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $90+\sigma_1^\circ$ y $180-\sigma_2^\circ$. Se pueden considerar como cualquiera de sus dos grupos adyacentes, es decir, final o lateral.
- *Lateral de fila o Tipo 3.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $180-\sigma_2^\circ$ y $180+\sigma_3^\circ$. Suele ser los nodos más comunes en los que una fila transcurre normalmente y desde cada uno ellos se genera un nuevo nodo, de modo que cada uno de estos nodos y su nuevo nodo generado pertenecerán a dos nuevos elementos de la fila generada. Según el ejemplo de la Figura 3.10, el nodo con ángulo α_2 se clasifica como lateral.
- *Ambiguo lateral/esquina de fila o Tipo 4.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $180+\sigma_3^\circ$ y $270-\sigma_4^\circ$. Se pueden considerar como cualquiera de sus dos grupos adyacentes, es decir, lateral o esquina.
- *Esquina de fila o Tipo 5.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $270-\sigma_4^\circ$ y $270+\sigma_5^\circ$. Suelen ser los nodos en los que la fila gira en una esquina lógica. A partir de cada uno de ellos, se generan tres nuevos nodos en el lazo de mallado, por lo que se asocian tres nuevos elementos en la fila para cada nodo esquina. Según el ejemplo de la Figura 3.10, el nodo con ángulo α_3 se clasifica como esquina.
- *Ambiguo de esquina/reverso de fila o Tipo 6.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $270+\sigma_5^\circ$ y $360-\sigma_6^\circ$. Se pueden considerar como cualquiera de sus dos grupos adyacentes, es decir, esquina o reverso.

- *Reverso de fila o Tipo 7.* Son aquellos nodos cuyo ángulo en la frontera de mallado está comprendido entre $360-\sigma_6^0$ y 360^0 . Son aquellos nodos en los que la fila gira dos esquinas lógicas secuencialmente, o invierte su dirección. Cada nodo reverso tiene asociados cuatro nuevos elementos en la fila.

La elección del grupo principal al que pertenecen los nodos en las zonas ambiguas se puede resolver buscando conseguir formas simples o primitivas, o evitando la generación de nodos irregulares. En el mallador desarrollado, se ha optado por clasificar los nodos de *Tipo 2* y los de *Tipo 4* directamente como *Tipo 3*, mientras que los de *Tipo 6* y *7* se clasifican como *Tipo 5*.

Además, se ha asignado el mismo valor a todas las tolerancias angulares, teniendo así:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 20^0$$

3.2.1.3. Selección de fila inicial

En realidad, esta etapa se puede dividir en dos partes: la primera de ellas es la selección de lazo de mallado, y la segunda la selección de nodo dentro de dicho lazo para comenzar a generar elementos.

No hay un criterio específico para escoger el lazo de inicio, por lo que el patrón a seguir en el mallador desarrollado, seleccionado heurísticamente, se basa en la longitud total del lazo. Así, siempre que es posible, se generan elementos en el lazo de mallado más pequeño, de tal manera que si la separación entre sus nodos es menor que el tamaño de borde de elemento deseado en la superficie, los elementos generados van creciendo gradualmente hasta adquirir las dimensiones óptimas. Con esta selección se consigue tener elementos homogéneos listos para afrontar una posible unión con otras fronteras de mallado mayores.

En cuanto a la selección del nodo inicial dentro de un lazo, se desea seleccionar siempre aquel cuyo ángulo es lo más próximo posible a 90 grados, con unos márgenes máximos de diferencia. Si se encuentra un nodo con estas características, se selecciona como inicial, aunque realmente se comienza a generar elementos desde su nodo siguiente en la frontera de mallado. Es por esto, que el nodo inicial se convierte en el último nodo de la fila desde el que se insertan nuevos elementos (si no se producen intersecciones en la fila) y de ahí que los nodos de *Tipo 1* se denominen finales. En caso de no encontrar nodos de *Tipo 1* adecuados, se repite la búsqueda para intentar seleccionar aquellos con un ángulo lo más

cercano posible a 270 grados, de nuevo con unos márgenes de tolerancia máxima; y si tampoco se obtiene ningún candidato, se repite la búsqueda para escoger nodos con ángulos próximos 180 grados². Tanto si se escoge un nodo con ángulo próximo a 180 como a 270 grados, el primer elemento se genera desde dicho nodo, a diferencia de como ocurre cuando se selecciona un nodo con un ángulo de 90 grados. Si no se encuentran nodos candidatos en ninguna de las tres búsquedas indicadas, pueden repetirse aumentando las tolerancias o directamente buscar el nodo con el ángulo más próximo a 90 grados, sea cual sea su ángulo.

En la Figura 3.13 se muestran tres ejemplos en los que varía el criterio de selección del nodo inicial, resaltado en color rojo, y siendo la zona gris la región a mallar, delimitada por sus nodos frontera. En el caso (a), únicamente hay un lazo de mallado compuesto por nodos Tipo 1 y Tipo 3, por lo que se escoge como inicial uno de los de Tipo 1. En el caso (b), hay dos lazos de mallado, de modo que se comienza a mallar desde el menor de ellos, y como está formado solo por nodos Tipo 5 con el mismo ángulo, se escoge cualquiera de ellos como inicial. En el caso (c), hay de nuevo dos lazos de mallado, pero el menor de ellos está compuesto únicamente por nodos de Tipo 3 con idéntico ángulo interior, por lo que se escoge cualquiera de ellos como inicial.

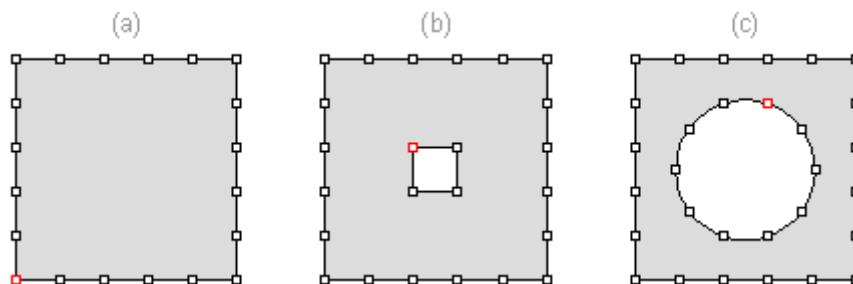


Figura 3.13: Ejemplos de selección de nodo inicial.

3.2.1.4. Generación de filas

La generación de elementos en la fila de mallado es un proceso secuencial a lo largo de la misma. La inserción de un elemento depende del tipo de nodo desde el que se genera (según la clasificación de nodos por ángulos de la sección 3.2.1.2) y de su separación con respecto a sus nodos adyacentes. Para generar elementos desde nodos laterales, esquina o reversos, es necesaria la inserción de nuevos nodos, obtenidos proyectando desde su nodo base (el seleccionado como actual para generar el elemento), variando el número de nodos a

² El motivo por el que se buscan los nodos de inicio con ángulos en el orden 90°, 270° y 180°, en lugar de 90°, 180° y 270°, se debe a la forma en que se insertan elementos en la fila, como se explica en la sección 3.2.1.4.

proyectar y la forma de hacerlo según el tipo del nodo actual³. A continuación, se explica el procedimiento para proyectar nuevos nodos desde nodos laterales, esquina o reversos, y así obtener nuevos elementos, además la generación elementos desde nodos finales de fila:

3.2.1.4.1. Proyección desde nodo lateral

Cuando el nodo actual es de *Tipo 3* solo se genera un nuevo elemento, por lo que basta con insertar un nuevo nodo. La proyección del nuevo nodo se explica siguiendo el ejemplo que se muestra en la Figura 3.14, donde se indica el sentido del lazo de mallado en color gris, se denota como N_i al nodo actual, a su nodo anterior en el lazo de mallado como N_{i-1} , a su nodo posterior como N_{i+1} , al nodo previo a su anterior como N_{j-1} , y al nuevo nodo proyectado como N_j , representado en color rojo. El ángulo interior de N_i se denota como α y las distancias desde N_i hasta N_{i-1} y N_{i+1} son d_1 y d_2 , respectivamente.

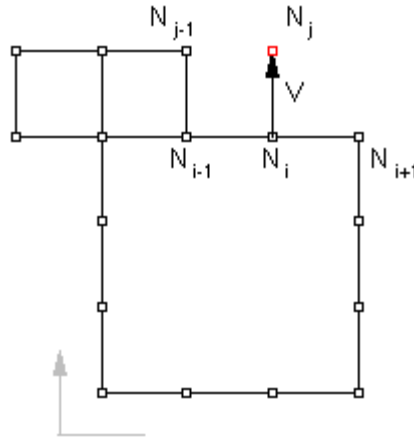


Figura 3.14: Proyección desde nodo lateral.

N_j se encuentra en el extremo del vector V , cuyo origen es el nodo N_i , está orientado según la bisectriz de α y su longitud, $|V|$, se calcula como indica la expresión (3.1).

$$|V| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{sen}(\alpha/2)} \quad (3.1)$$

La función seno que aparece en la expresión (3.1) se usa para suavizar las variaciones que pueden aparecer en las filas, debidas a las desigualdades en las distancias entre nodos vecinos.

Así, el nuevo elemento generado está compuesto por los nodos N_{i-1} , N_i , N_j , N_{j-1} y la frontera de mallado, que antes de generar el elemento venía dada por la secuencia ..., N_{j-2} , N_{j-1} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} ,... se actualiza cambiando el nodo anterior por el nuevo, quedando la secuencia de la forma ..., N_{j-2} , N_{j-1} , N_j , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} ,...

³ A partir de ahora y a menos que se indique lo contrario, al nodo desde el cual se va a generar un nuevo elemento se le llamará nodo actual.

Existe un caso particular para proyectar desde un nodo actual de *Tipo 3*, como se explica a continuación.

3.2.1.4.2. Proyección inicial si sólo hay nodos laterales

Cuando hay lazos en las superficies originales compuestos por uno o varios contornos curvados (cóncavos o convexos) que no tienen vértices puros, puede aparecer el problema de que sus correspondientes lazos de mallado estén formados únicamente por nodos laterales, por tener todos ellos ángulos comprendidos entre $180-\sigma_2^0$ y $180+\sigma_3^0$, como es el caso de un lazo con forma de circunferencia o de elipse. Cuando esto ocurre, no sirve la proyección indicada en el punto anterior, ya que no se dispone de una distribución de los nodos lo suficientemente adecuada como para generar un elemento cuadrangular admisible, siguiendo ese patrón. Ahora, es necesario insertar dos nuevos nodos, para así tener un elemento inicial desde el que poder continuar la fila. La proyección del nuevo nodo se explica siguiendo el ejemplo que se muestra en la Figura 3.15, donde se indica el sentido del lazo de mallado en color gris, se denota como N_i al nodo actual, a su nodo anterior en el lazo de mallado como N_{i-1} , a su nodo posterior como N_{i+1} , al nodo siguiente a su posterior como N_{i+2} , y a los nuevos nodos como N_j y N_k , representados en color rojo. Los ángulos interiores de N_i y N_{i+1} se denotan como α y β , y las distancias desde N_i hasta N_{i-1} y N_{i+1} son d_1 y d_2 respectivamente; siendo d_3 la distancia entre N_{i+1} y N_{i+2} .

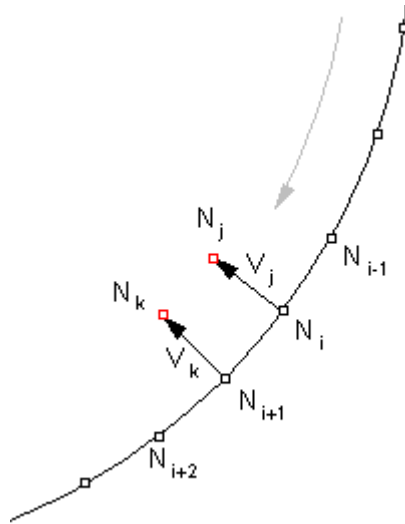


Figura 3.15: Proyección desde nodo lateral inicial.

N_j se encuentra en el extremo del vector V_j , cuyo origen es el nodo N_i , está orientado según la bisectriz de α y su longitud, $|V_j|$, se calcula como indica la expresión (3.2). N_k se encuentra en el extremo del vector V_k , cuyo origen es el nodo N_{i+1} , está orientado según la bisectriz de β y su longitud, $|V_k|$, se calcula según la relación (3.3).

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{sen}(\alpha/2)} \quad (3.2)$$

$$|V_k| = \frac{(d_2 + d_3)/2}{\text{sen}(\beta/2)} \quad (3.3)$$

Con los dos nodos insertados, el nuevo elemento generado está compuesto por los nodos N_i , N_j , N_k , N_{i+1} , y la frontera de mallado, que antes de generar el elemento venía dada por la secuencia ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ..., inserta los dos nuevos nodos entre el actual y su siguiente, pasando a ser ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_j , N_k , N_{i+1} , N_{i+2} , ... De esta forma, los nodos N_i y N_{i+1} , que eran laterales, pasan a ser finales de fila, por lo que se puede continuar insertando elementos hasta terminar la fila al llegar de nuevo al nodo N_i .

3.2.1.4.3. Proyección desde nodo esquina

Cuando el nodo actual es de *Tipo 5* se generan dos nuevos elementos, por lo que es necesario insertar tres nodos. La proyección de los nuevos nodos se explica siguiendo el ejemplo de la Figura 3.16, donde se indica el sentido del lazo de mallado en color gris, se denota como N_i al nodo actual, a su nodo anterior en el lazo de mallado como N_{i-1} , a su nodo posterior como N_{i+1} , al nodo previo a su anterior como N_{j-1} , y a los nodos proyectados como N_j , N_k y N_l , representados en color rojo. El ángulo interior de N_i se denota como α y las distancias desde N_i hasta N_{i-1} y N_{i+1} son d_1 y d_2 respectivamente. Los lados que completan los dos nuevos elementos generados se han resaltado en color azul.

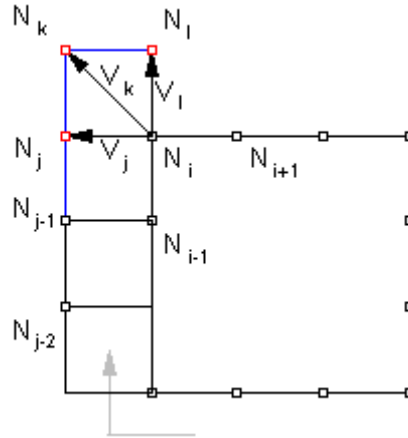


Figura 3.16: Proyección desde nodo esquina.

Los tres nuevos nodos N_j , N_k y N_l se encuentran respectivamente en el extremo de los vectores V_j , V_k y V_l , cuyo origen es el nodo N_i , están orientados según las fracciones de $1/3$, $1/2$ y $2/3$ de α en el sentido de la frontera de mallado, y sus longitudes se calculan se indica en las expresiones (3.4), (3.5) y (3.6).

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{sen}(\alpha/3)} \quad (3.4)$$

$$|V_k| = \sqrt{2} |V_j| \quad (3.5)$$

$$|V_l| = |V_j| \quad (3.6)$$

Así, el primer elemento generado está compuesto por los nodos N_{i-1} , N_i , N_j y N_{j-1} , el segundo por N_i , N_l , N_k y N_j , y la frontera de mallado, que antes de generar los elementos venía dada por la secuencia ..., N_{j-2} , N_{j-1} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ... se actualiza insertando los tres nodos proyectados donde antes estaba el nodo anterior, quedando la secuencia ... N_{j-2} , N_{j-1} , N_j , N_k , N_l , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ...

En el caso particular de que el nodo inicial para generar en los elementos sea esquina, la única variante con respecto al procedimiento explicado es que se genera un nuevo elemento solamente, compuesto por los nodos N_i , N_l , N_k , N_j , y la frontera de mallado repite al nodo actual, pasando de tener la secuencia ..., N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , ... a ... N_{i-1} , N_i , N_j , N_k , N_l , N_i , N_{i+1} , ..., tal y como ocurre en el ejemplo de la Figura 3.17. Los nuevos nodos insertados se representan en color rojo, y el elemento resultante en color azul.

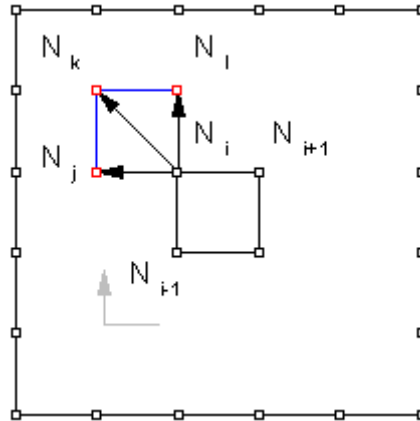


Figura 3.17: Proyección desde nodo esquina inicial.

3.2.1.4.4. Proyección desde nodo reverso

Cuando el nodo actual es de *Tipo 7* se generan tres nuevos elementos, por lo que es necesario insertar cinco nodos. La proyección de los nuevos nodos se explica siguiendo el ejemplo de la Figura 3.18, donde se indica el sentido del lazo de mallado en color gris, se denota como N_i al nodo actual, a su nodo anterior en el lazo de mallado como N_{i-1} , a su nodo posterior como N_{i+1} , al nodo previo a su anterior como N_{j-1} , y a los nodos proyectados como N_j , N_k , N_l , N_m y N_n , representados en color rojo. El ángulo interior de N_i se denota como α y las distancias desde N_i hasta N_{i-1} y N_{i+1} son d_1 y d_2 , respectivamente. Los lados que completan los tres nuevos elementos generados se han resaltado en color azul.

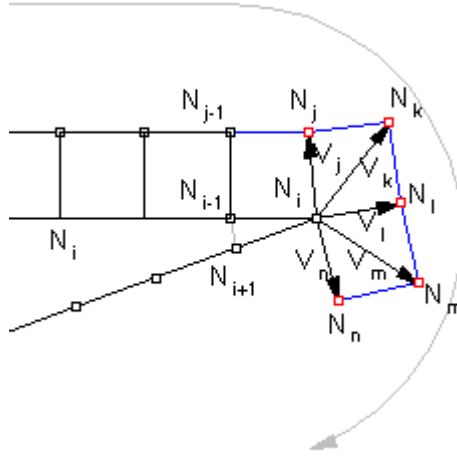


Figura 3.18: Proyección desde nodo reverso.

Los cinco nuevos nodos N_j , N_k , N_l , N_m y N_n , se encuentran respectivamente en el extremo de los vectores V_j , V_k , V_l , V_m y V_n , cuyo origen es el nodo N_i , están orientados según las fracciones de $1/4$, $3/8$, $1/2$, $5/8$ y $3/4$ de α en el sentido del lazo de mallado, y sus magnitudes se calculan como indican las expresiones de (3.7) a (3.11).

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\sin(\alpha/4)} \quad (3.7)$$

$$|V_k| = \sqrt{2} |V_j| \quad (3.8)$$

$$|V_l| = |V_j| \quad (3.9)$$

$$|V_m| = |V_k| \quad (3.10)$$

$$|V_n| = |V_j| \quad (3.11)$$

Así, el primer elemento generado está compuesto por los nodos N_{i-1} , N_i , N_j y N_{j-1} ; el segundo por N_i , N_l , N_k y N_j ; y el tercero por N_i , N_n , N_m y N_l ; mientras que la frontera de mallado, que antes de generar los elementos venía dada por la secuencia ..., N_{j-2} , N_{j-1} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ... se actualiza insertando los cinco nodos proyectados donde antes estaba el nodo anterior, quedando la secuencia ..., N_{j-2} , N_{j-1} , N_j , N_k , N_l , N_m , N_n , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ...

3.2.1.4.5. Generación de elemento desde nodo final

En el caso de llegar a un nodo final de fila, basta con generar un elemento compuesto por el nodo previo al anterior del actual en la frontera, el anterior, el actual y el siguiente. Siguiendo con la nomenclatura de los ejemplos anteriores, si llega con una frontera formada por la secuencia ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ..., el nuevo elemento está formado por N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , y se eliminan de la frontera el nodo anterior y el actual, quedando la secuencia ..., N_{i-2} , N_{i+1} , N_{i+2} , ... Este ejemplo se ha representado en la Figura 3.19.

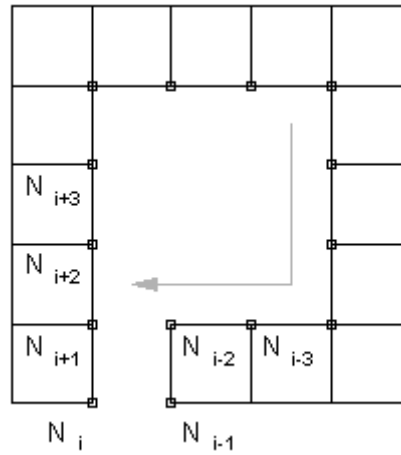


Figura 3.19: Generación de elemento desde nodo final.

Con estos patrones, es suficiente para mallar cualquier superficie arbitraria con elementos cuadrados, siempre que se tenga un número de nodos par en las fronteras de mallado y que se tengan en cuenta las posibles intersecciones durante el mallado. No obstante, se hace casi indispensable el uso de otras etapas como el suavizado, el cosido o el limpiado final, que mejoran considerablemente la calidad final de la malla.

En realidad, la generación de nodos explicada está enfocada al mallado de superficies planas en dos dimensiones. Para adaptarla a superficies arbitrarias tridimensionales [5], todos los cálculos de ángulos de nodos u otras operaciones, como es la detección de cortes entre fronteras, se basan en proyecciones de los nodos que intervienen sobre planos locales a estos, como el ejemplo de la Figura 3.11, obteniendo una representación fiable y precisa sobre un plano de lo que ocurre en la región tridimensional en estudio.

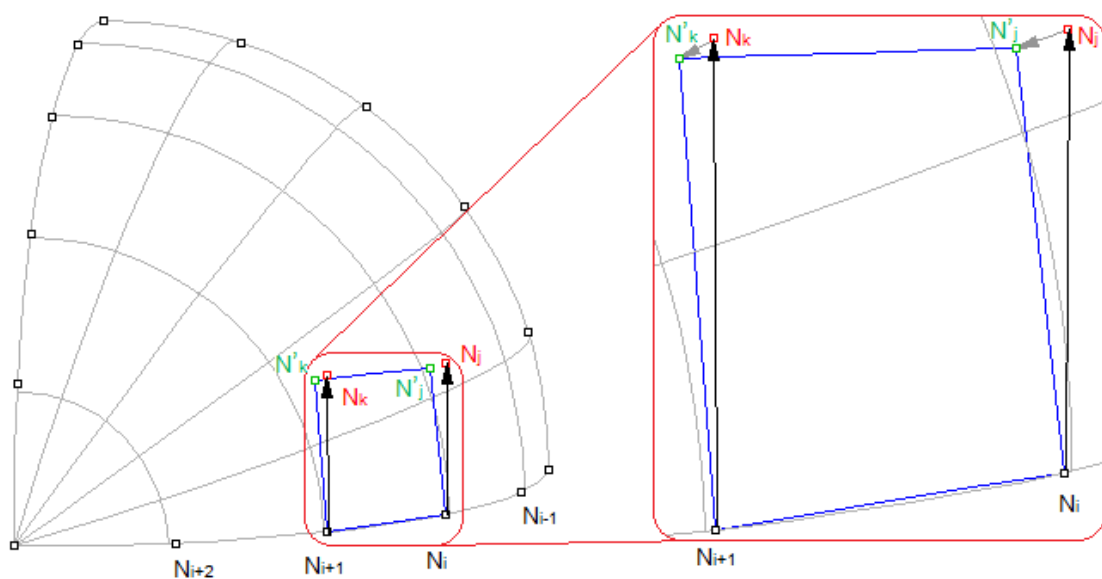


Figura 3.20: Búsqueda de puntos de mallado sobre la superficie original.

Además, las proyecciones de nuevos nodos estudiadas, proporcionan puntos que no se encuentran sobre las superficies originales cuando estas son curvas, por lo que se realiza una búsqueda eficiente usando el Método del Gradiente Conjugado [6] que devuelve los puntos sobre las superficies paramétricas que minimizan la distancia con respecto a los puntos proyectados. El procedimiento se puede explicar tomando como ejemplo la superficie curva representada en color gris en la parte izquierda de la Figura 3.20, junto con sus líneas isoparamétricas y sus nodos frontera en color negro. Si se desea forzar a que se comience la generación de elementos en la fila desde el nodo N_i , es necesario insertar dos nuevos nodos: N_j , proyectando desde N_i , y N_k , proyectando desde N_{i+1} . No obstante, se observa que los nodos N_j y N_k , representados en color rojo, no se encuentran sobre la superficie paramétrica, por lo que es necesario buscar sus puntos más cercanos sobre la misma, obteniendo así N'_j y N'_k , representados en color verde. Tras la búsqueda, el nuevo elemento generado está formado por los nodos N_i , N_{i+1} , N'_j y N'_k , y la secuencia de la frontera de mallado pasa de estar compuesta por los nodos ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ... a incluir los nuevos nodos generados, resultando la nueva secuencia ... N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N'_j , N'_k , N_{i+1} , N_{i+2} , ...

3.2.1.5. Intersección de fronteras

A medida que se generan filas de elementos en una determinada región, puede ocurrir que la frontera de mallado actual interseque con ella misma o con alguna de las demás ya existentes. Por ejemplo, en la Figura 3.21a, se produce una intersección entre el último elemento generado en la fila y uno de los ya existentes, por lo que se resuelve conectando los elementos implicados que proporcionan una mejor unión, y separando la frontera previa en dos fronteras independientes, como se muestra en la Figura 3.21b.

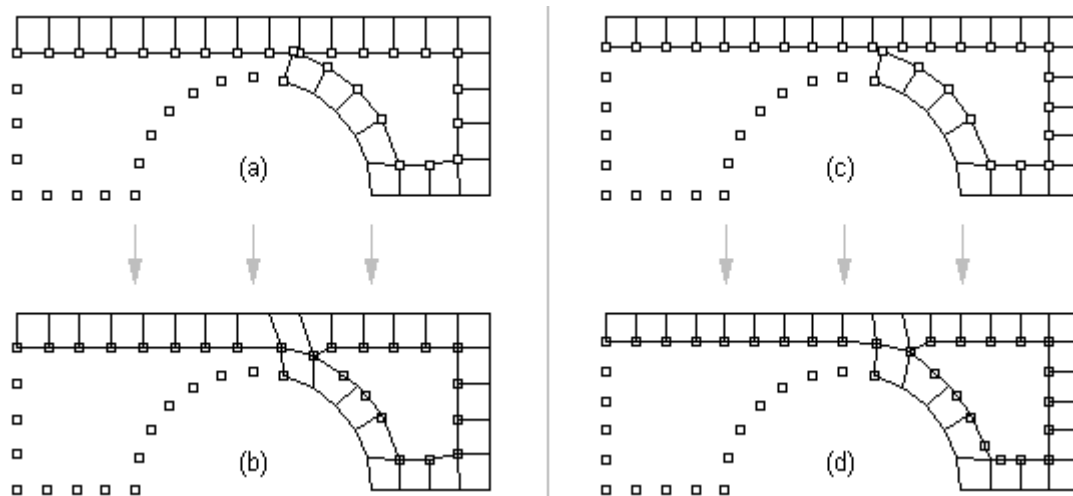


Figura 3.21: Ejemplos de intersecciones encontradas y resueltas.

Otra posibilidad es que se aproximen demasiado las fronteras de mallado, y aunque no haya intersecciones, se tratan de resolver de la misma forma que si las hubiera. Esto ocurre en la Figura 3.21c, donde se observa que no hay una intersección real (la frontera de mallado no llega a cruzarse con ella misma), pero se trata como tal por la proximidad entre el último elemento insertado en la fila y los ya existentes. Se resuelve de la misma manera que cuando se produce la intersección, resultando dos fronteras independientes de mallado como se muestra en la Figura 3.21d.

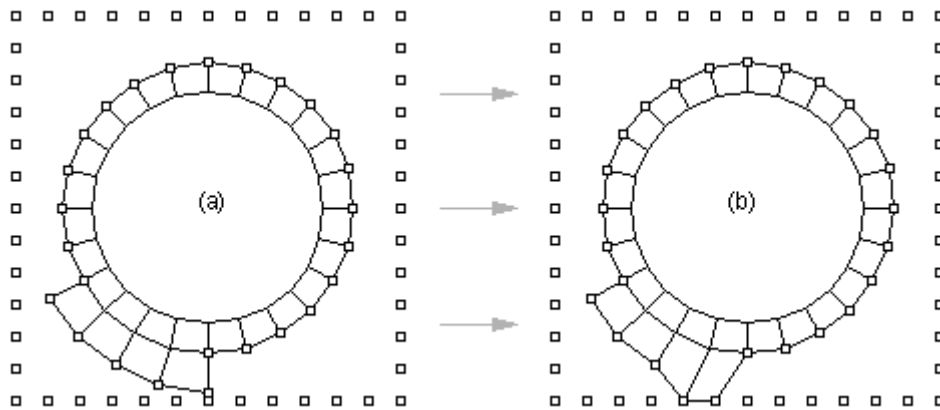


Figura 3.22: Intersección de dos lazos (a) resuelta unificándolos (b).

Cuando se produce una intersección, se distinguen dos posibilidades:

- *Intersección de una única frontera de mallado.* Como resultado, se generan dos nuevas fronteras, debiendo tener ambas un número par de nodos. Es lo que ocurre en los ejemplos de la Figura 3.21.
- *Intersección de dos fronteras de mallado.* Al conectar dos fronteras con un número par de nodos, la única frontera resultante siempre tiene un número par de nodos. Un ejemplo de este caso se muestra en la Figura 3.22a, en el que se tiene un lazo frontera exterior y la frontera de mallado en la que se están insertando elementos corresponde a un lazo interior. Aunque el último elemento generado en la fila es válido y no interseca con el lazo exterior, la proximidad entre estos hace que se considere como una intersección, que se resuelve uniendo los dos lazos en uno solo, obteniendo el resultado de la Figura 3.22b.

Para realizar las conexiones, se tienen en cuenta factores como las diferencias de tamaño entre los elementos que intersectan, la proximidad o la perpendicularidad de los tramos candidatos a unir en las fronteras, etc. Conviene seleccionar como bordes candidatos,

además de los tramos de frontera que se cortan, sus vecinos anteriores y posteriores en la frontera, de tal manera que se tratan de unir los candidatos que garantizan una mayor calidad en los elementos y fronteras resultantes. Para cada unión realizada, se comprueba si hay nuevas intersecciones y en caso de que las haya, se descarta el candidato seleccionado y se prueba con el siguiente. En caso de no poder realizar una conexión correctamente, se descarta el último elemento generado y se detiene la inserción de elementos en la fila.

En el caso de mallado bidimensional, los solapamientos en las fronteras se detectan fácilmente como la intersección entre las líneas rectas que componen los bordes. Sin embargo, esta detección no es trivial en el mallado tridimensional, ya que los elementos están compuestos por tramos curvados entre los que se complica la detección de cortes o relaciones de proximidad. Una primera aproximación puede ser realizar proyecciones sobre planos locales de forma análoga a como se hace para calcular los ángulos interiores de los nodos, pero cuanto mayor es la curvatura de las superficies menos precisa resulta, y es difícil garantizar que se detectan todos los posibles cortes o que no se encuentran falsas intersecciones.

3.2.1.5.1. Factor de proximidad

El método escogido para la detección de bordes candidatos a conectar, se basa en una ecuación heurística válida para geometrías tridimensionales que cuantifica la relación de proximidad mediante un factor. Este factor de proximidad, F , depende de tres tipos de contribuciones: la de la distancia de entre los segmentos a conectar (F_{dis}), la del ángulo entre los mismos (F_{ang}), y la de la conexión por distancia mínima (F_{con}); y matemáticamente se puede expresar como se indica en la relación (3.12).

$$F = F_{dis} + F_{ang} + F_{con} \quad (3.12)$$

3.2.1.5.2. Espacio adherente

Para calcular la contribución por distancia entre segmentos, se emplea el concepto de espacio adherente, que se puede interpretar como un volumen cilíndrico centrado en un borde del elemento y que sirve para admitir como candidatos a unir los bordes que caen dentro de él, y descartar los que se encuentran fuera. El radio del espacio adherente se define según la ecuación (3.13), donde l_1 y l_2 representan las longitudes de los segmentos candidatos, y el factor α controla el tamaño relativo del espacio con respecto a la longitud de los segmentos.

$$S = \alpha \frac{l_1 + l_2}{2} \quad (3.13)$$

El factor α debe representar la probabilidad de conectar con éxito dos segmentos, basándose en si sería mejor insertar un elemento adicional entre los frentes a conectar o no, de tal manera que los elementos tengan unos ratio de aspecto y deformidad lo más ideales posible. Una forma de cuantificarlo es suponer el caso ideal en el que se tienen dos elementos paralelos de longitudes l_1 y l_2 perfectamente centrados, separados una distancia que no sea mayor que la longitud media de los dos segmentos, y comparar los ratios de tamaño que se obtendrían si se optara por unir los segmentos o insertar un nuevo elemento entre ellos. Tras resolver una ecuación cuadrática, se obtiene un valor aproximado de $\alpha \approx 0,45$. [5]

En la Figura 3.23 se muestra el ejemplo del espacio adherente asociado a un elemento, de lado l_1 , cuando se encuentra enfrentado a otro elemento, de lado l_2 .

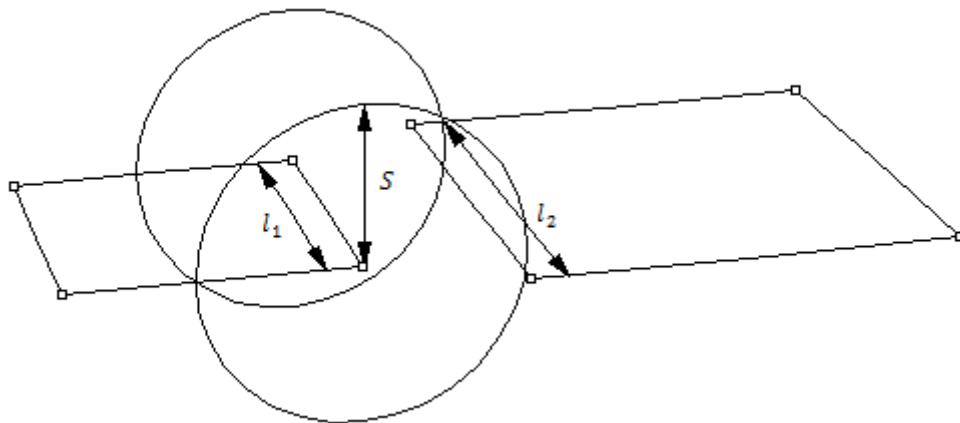


Figura 3.23: Espacio adherente entre dos bordes de elementos enfrentados.

3.2.1.5.3. Distancias mínimas

La distancia mínima se define como la más cercana entre dos bordes de elementos candidatos, y se calcula como la distancia perpendicular menor entre las rectas que los forman, consideradas como infinitas. En la mayoría de casos, la distancia mínima se encuentra fuera del espacio paramétrico de los segmentos de las rectas, por lo que se calcula como la menor separación entre los extremos de los segmentos. La distancia mínima, por tanto, se determina como la menor de las tres distancias siguientes:

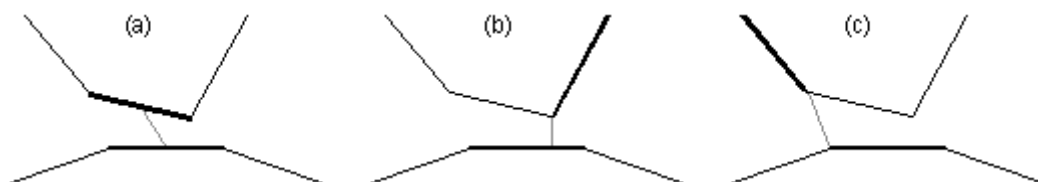


Figura 3.24: Distancias mínimas entre elementos.

- a) Distancia entre los puntos centrales de los segmentos (Figura 3.24a).
- b) Menor distancia de los extremos de un segmento al punto más cercano de otro segmento (Figura 3.24b).

- c) Menor distancia entre los extremos de un segmento con los extremos del otro segmento (Figura 3.24c).

3.2.1.5.4. Ecuación de proximidad

Como se ha introducido en la subsección 3.2.1.5.1, el factor de proximidad se calcula como tres combinaciones diferentes, de tal manera que siempre es mayor o igual a cero. Además, depende de la menor distancia entre los segmentos d , el valor de S determinado por el espacio adherente, los vectores unitarios de los segmentos u y v a lo largo de los bordes, un factor C que pondera según cómo se ha obtenido la distancia mínima entre los segmentos ($C = 0$ para el caso 1, $C = 1$ para el caso 2 y $C = 2$ para el caso 3, según la distinción expuesta en la subsección 3.2.1.5.3), y tres factores de ponderación f_{dis} , f_{ang} y f_{con} , que sirven para regular como influye cada una de las contribuciones, como se recoge en la ecuación (3.14). Los factores de ponderación aseguran que si los bordes candidatos no cumplen alguno de los requisitos de calidad para la unión de manera clara, se descarten; son empíricos y sus valores se ajustan para que cuando se tenga un valor de F menor o igual que 1, los elementos sean candidatos para realizar la conexión, habiendo tomado como valores válidos: $f_{dis} = 1$, $f_{ang} = 0,25$ y $f_{con} = 0,1$.

$$F = f_{dis} \cdot \frac{d}{S} + f_{ang} \cdot (1 - u \cdot v) + f_{con} \cdot C \quad (3.14)$$

Además de seleccionar como candidatos los segmentos que tienen un valor de F menor o igual a la unidad, también se seleccionan los segmentos que intersectan y sus vecinos, ya que hay casos en que aunque los elementos candidatos son de dimensiones muy diferentes, la mejor solución pasa por unirlos.

El factor de proximidad se usa para hacer una preselección de los elementos a unir, por lo que en caso de encontrar candidatos, se trata de hacer las uniones yendo desde los que tienen un valor de F menor a los de mayor, hasta encontrar alguno válido que proporcione elementos correctos y garantice que no hay nuevas intersecciones. En caso de que haya segmentos preseleccionados pero ninguno permita realizar la unión con éxito, el último elemento generado se descarta, ya que perjudica la calidad de la malla, bien por crear intersecciones o por tener segmentos muy próximos en las fronteras de mallado.

Por último, destacar que aunque no se detecten cortes ni valores adecuados del factor de proximidad, hay que evaluar si el último elemento generado contiene en su interior alguno de los lazos frontera existentes, en cuyo caso debe ser descartado. Esto suele ocurrir, especialmente, en superficies que tienen lazos interiores muy pequeños en comparación con

el tamaño de elemento deseado. Una de las formas de evitarlo, en la medida de posible, es escoger siempre como lazo de mallado actual el que tiene una menor longitud total, de tal manera que los elementos van aumentando su tamaño gradualmente.

3.2.1.6. Suavizado

Principalmente, esta etapa pretende mantener la perpendicularidad en los elementos y la uniformidad total de la frontera de mallado. Se aplica siempre que se detiene la inserción de elementos en la fila, bien por haberla completado, o bien por haber tratado una intersección.

Con el suavizado, se ajustan los nodos para que los elementos existentes se parezcan más a paralelepípedos, con el inconveniente de que pueden aumentar las diferencias de dimensiones entre sus bordes.

Por una parte, se realiza un suavizado a los nodos del lazo de mallado que no pertenecen a las fronteras iniciales, en el que se ajustan las posiciones de los últimos nodos insertados, modificando las separaciones y ángulos de estos y sus nodos base. Por otra parte, se realiza un ajuste de los nodos flotantes de las últimas filas generadas, modificando sus posiciones por medio de promediados de posición y distancias entre nodos adyacentes conectados.

Como ejemplo, en la Figura 3.25 se representa una fila mallada completamente (en dirección hacia fuera) en color rojo, y su forma resultante tras aplicarle el suavizado, en color negro. En este caso, los nodos base son además frontera, por lo que no se modifican.

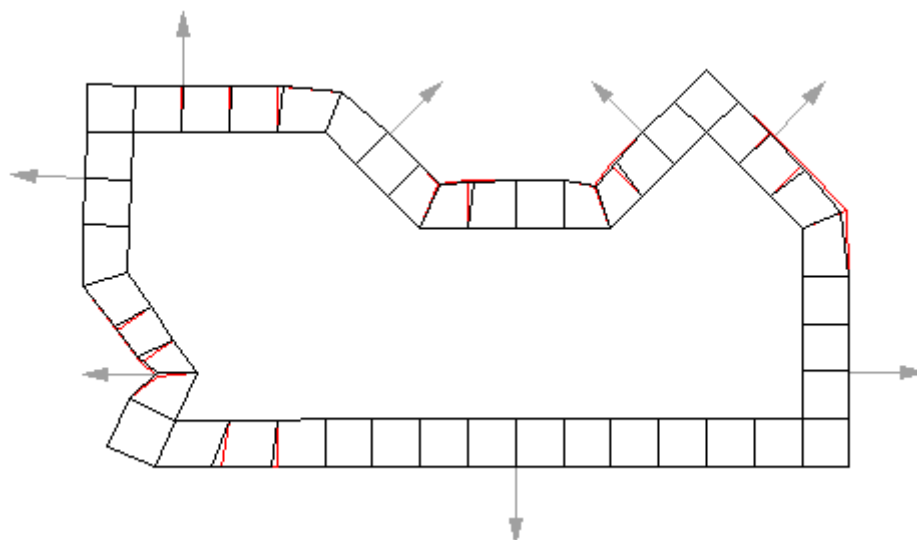


Figura 3.25: Ejemplo de suavizado en una fila.

3.2.1.6.1. Suavizado de los nodos de mallado

El ajuste realizado se basa tanto en criterios de longitud como de ángulos.

Se denota como V_i al vector que va del origen al nodo N_i . Suponiendo que N_i está conectado a n elementos, se expresa como V_{mj} , V_{mk} y V_{ml} a los vectores que van del origen a los respectivos nodos N_j , N_k y N_l del m -ésimo elemento. Además, los nodos se encuentran en un sentido único (horario o antihorario) alrededor del elemento. Se define un nuevo vector, V'_i , como aquel que va del origen a la nueva posición propuesta para el nodo N_i , que se calcula mediante la expresión (3.15).

$$V'_i = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (V_{mj} + V_{ml} - V_{mk}) \quad (3.15)$$

Se denota como Δ_A al vector resultante de la diferencia de posición del nodo N_i en el suavizado, como indica la relación (3.16).

$$\Delta_A = V'_i - V_i \quad (3.16)$$

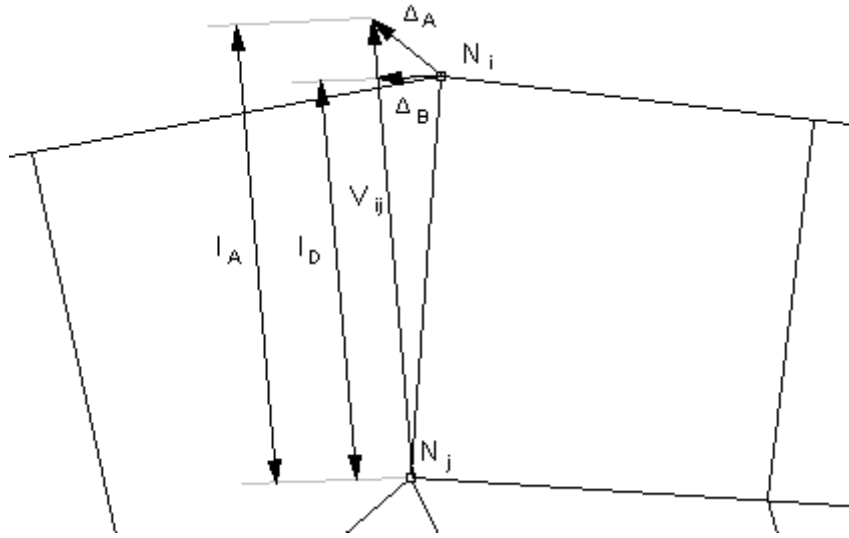


Figura 3.26: Ajuste de suavizado por longitud de dos nodos.

Para examinar el criterio de suavizado por longitud, se denota como N_j al nodo flotante opuesto a N_i en la frontera, común entre los dos únicos elementos conectados al nodo N_i , como muestra la Figura 3.26. Ahora, V_i y V_j son los vectores del origen a los nodos N_i y N_j , respectivamente. Se llama l_D a la longitud deseada para el nodo N_i , que es la longitud del vector de proyección usado inicialmente para generar el nodo, definido por las ecuaciones (3.1), (3.4) y (3.7). l_A es la longitud de un vector V_{ij} que va desde N_j a la nueva posición de N_i , V'_i , determinada por la expresión (3.15). Se define un cambio en el vector de posición Δ_B mediante la relación (3.17).

$$\Delta_B = V_j - V_i + (\Delta_A + V_i - V_j) \frac{l_D}{l_A} \quad (3.17)$$

Este ajuste es únicamente una modificación en la longitud del vector V_{ij} , sin cambiar su orientación, como se muestra en la Figura 3.26. El ajuste por longitud ayuda a proteger el tamaño deseado del elemento que se está generando así como su ratio de aspecto. Sin embargo, no garantiza la perpendicularidad de todas las esquinas del elemento.

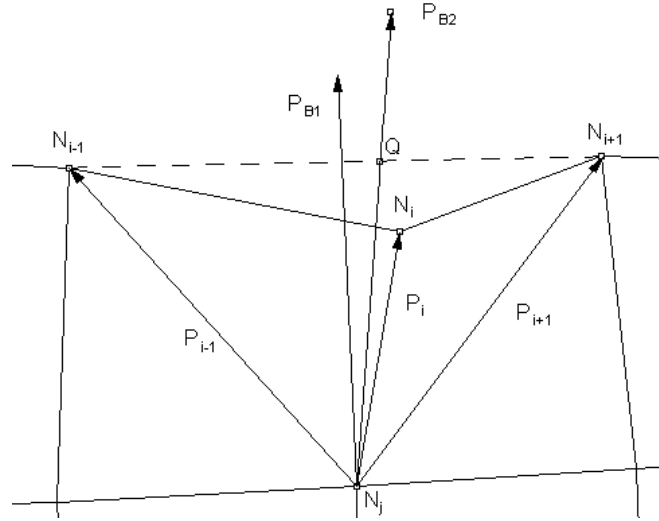


Figura 3.27: Ajuste de suavizado por ángulo.

Después del ajuste por longitud, se hace el ajuste angular en la fila de mallado. De nuevo, N_j es el nodo flotante opuesto a N_i en la frontera común, como se muestra en la Figura 3.27. Se representan como N_{i-1} y N_{i+1} a los nodos previo y siguiente a N_i en la frontera de mallado, respectivamente. Se denota como P_i , P_{i-1} y P_{i+1} a los vectores que van desde el nodo N_j a los nodos N_i , N_{i-1} y N_{i+1} , respectivamente. Se define un nuevo vector P_{B1} , como aquel que biseca al ángulo entre P_{i-1} y P_{i+1} ; y P_{B2} como el vector que se pretende encontrar para determinar la posición ajustada de N_i , cuyo inicio se sitúa en N_j , y dirección se define a lo largo del ángulo bisector entre P_{B1} y P_i .

$$|P_{B2}| = \begin{cases} \frac{l_D + l_Q}{2} & \text{si } l_D > l_Q \\ l_D & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.18)$$

A continuación se explica cómo determinar la longitud del vector P_{B2} . En primer lugar, se calcula la posición de un nuevo punto, Q , como la intersección entre la extensión de P_{B2} y la línea que conecta los nodos N_{i-1} y N_{i+1} . La longitud desde Q a N_j es l_Q , y la longitud original de proyección de N_i es l_D , como antes. La longitud del vector P_{B2} , $|P_{B2}|$, se calcula según las longitudes relativas de l_D y l_Q , como indica la relación (3.18).

Con esto, se ha definido la nueva posición de N_i basada en el suavizado por ajuste angular. El cambio en el vector de posición para el suavizado angular, Δ_c , se calcula según la ecuación (3.19).

$$\Delta_c = P_{B2} - P_i \quad (3.19)$$

Este suavizado por ajuste angular sirve para aumentar la perpendicularidad de los elementos en las esquinas, y ayuda a mantener una frontera de mallado suave.

El cambio final en el vector de posición, Δ_i , para el nodo N_i , unido únicamente a dos elementos en la frontera, se define mediante la expresión (3.20).

$$\Delta_i = \frac{\Delta_B + \Delta_c}{2} \quad (3.20)$$

En los nodos de la frontera de mallado que pertenecen a más o menos de dos elementos, el cambio de posición se basa únicamente en el cambio de vector indicado por la expresión (3.16).

3.2.1.6.2. Suavizado de los nodos interiores

Este ajuste pretende recolocar todos los nodos flotantes, independientemente del número de nodos a los que se encuentren conectados, utilizando un conjunto de vectores que van desde un nodo interior a todas sus conexiones. Así, se denota como C_j al vector contribución de un determinado nodo conectado N_j , cuando se realiza el suavizado de un punto interior N_i . En la definición de C_j , se considera como V_j al vector que va del nodo N_i al nodo N_j , como se muestra en la Figura 3.28, siendo $1 \leq j \leq 4$. Si el nodo N_j no es frontera fijo, su vector contribución C_j es equivalente a V_j ; mientras que si es frontera fijo, entonces su contribución C_j se calcula según la expresión (3.21).

$$C_j = V_j + \Delta_{c_j} \quad (3.21)$$

En la expresión (3.21), Δ_{c_j} es la variación de posición obtenida aplicando el criterio de suavizado angular de la relación (3.19).

$$\Delta_i = \frac{\sum_{j=1}^n |C_j| C_j}{\sum_{j=1}^n |C_j|} \quad (3.22)$$

Se denota como Δ_i al vector de cambio de posición de N_i , que se define como la suma de todos los vectores contribución de sus nodos adyacentes, ponderada por la longitud de dichos vectores. Si hay n nodos conectados a N_i , como se muestra en la Figura 3.28 ($n = 4$), Δ_i se calcula según la expresión (3.22).

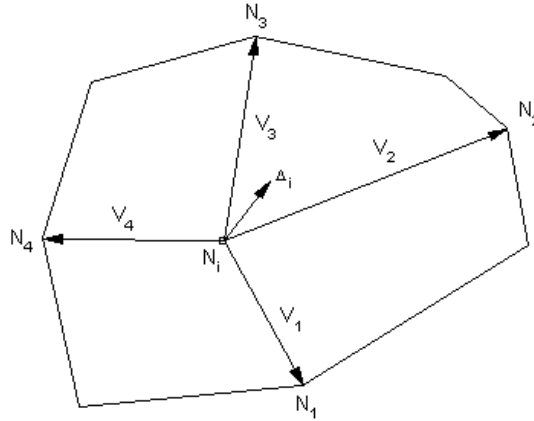


Figura 3.28: Ajuste de suavizado en nodos interiores.

La suma ponderada tiende a mantener los elementos perpendiculares a la región del exterior de la frontera de mallado, moviendo los nodos una distancia igual desde sus nodos vecinos conectados y convergiendo rápidamente.

3.2.1.7. Cosido

La etapa de cosido sirve para corregir las posibles grietas que pueden aparecer en la frontera de mallado durante la generación de elementos, considerando como grietas aquellos nodos que tienen ángulos interiores muy pequeños.

El criterio para eliminar las grietas se basa en el ángulo interior de los nodos, α , el número de bordes de elementos adjuntos, N_E , y si se trata de nodos permanentes o variables. Además, se distinguen tres tipos de cosido: de nodos de la frontera de mallado flotantes, de nodos fijos y entre dos bordes de elementos de longitud muy distinta (cosido de transiciones).

3.2.1.7.1. Cosido de nodos interiores

Se trata del cosido más común, y se aplica a los nodos flotantes de la frontera de mallado que cumplen la condición (3.23).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha < \varepsilon_1 & \text{para } N_E \geq 5 \\ \alpha < \varepsilon_2 & \text{en caso contrario} \end{array} \right\} \text{ siendo } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \quad (3.23)$$

Según la relación (3.23), la tolerancia de cosido, ε_i (con $i = 1, 2$), disminuye a medida que el número de elementos adjuntos aumenta. Esta tolerancia corrige las grietas que forman los nodos irregulares y reduce la irregularidad de los nodos en la punta de las grietas.

En la parte izquierda de la Figura 3.29, se muestra un nodo interior N_i , con un ángulo α lo suficientemente pequeño para hacer un cosido interior, que se encuentra conectado a $N_E = 5$ bordes de elementos. Con este ejemplo, se explica el cosido interior, que consiste

únicamente en conectar los nodos adyacentes al nodo candidato, N_{i-1} y N_{i+1} . Como se observa en la parte derecha de la figura, N_i pasa a tener un borde de elemento conectado menos (de 5 a 4), pero entonces es el nodo N_j el que pasa a tener 5 conexiones. La idea del cosido de nodos interiores, es que se va propagando la formación inicial de N_i por sus nodos siguientes N_{i+1} , N_{i+2} ,... hasta conseguir que la punta de la grieta se aproxime a una esquina cuadrada.

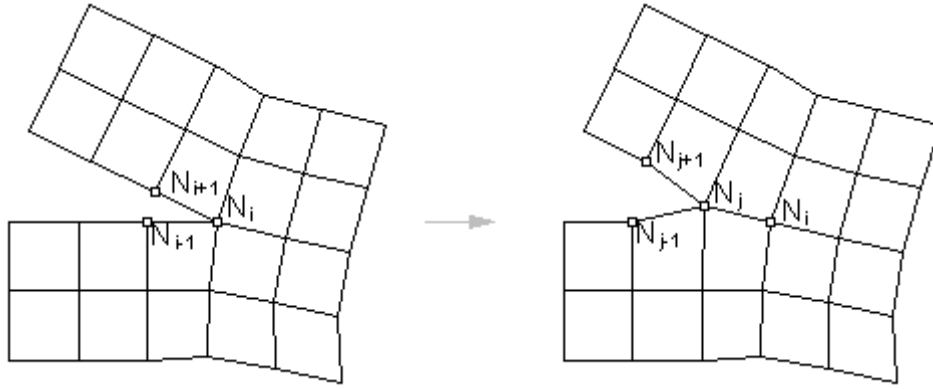


Figura 3.29: Cosido de nodos interiores.

3.2.1.7.2. Cosido de nodos fijos

Como ocurre en el resto de etapas de mallado, los nodos fijos son un problema especial cuando tienen un ángulo interior muy pequeño y uno de sus nodos adyacentes en la frontera de mallado es también fijo. Esto sucede cuando las fronteras originales de la superficie a mallar tienen ángulos pequeños, por lo que hay que evitar en la inserción de elementos en la fila que sus ángulos interiores sean demasiado grandes o demasiado pequeños.

Para corregir las grietas que tienen su punta en nodos fijos, se mueven los nodos flotantes conectados a los fijos, de tal manera que se “abre” gradualmente la grieta hasta conseguir que los nuevos elementos generados tengan ángulos interiores aceptables.

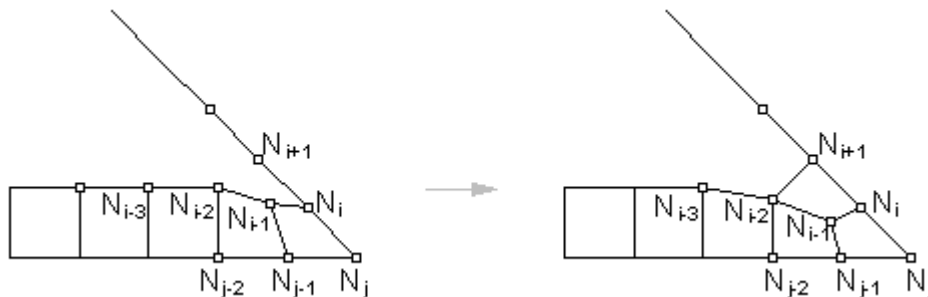


Figura 3.30: Cosido de nodos fijos.

Tomando como ejemplo la parte izquierda de la Figura 3.30, se tiene una grieta en la frontera de mallado con la punta en el nodo fijo N_i , que se encuentra conectado a otro nodo fijo N_{i+1} , y a un nodo flotante N_{i-1} . Al ser N_{i+1} un nodo fijo, no se puede conectar con N_{i-1} , tal

y como se explicaba en la subsección 3.2.1.7.1. Como solución, se acerca el nodo N_{i-1} hacia N_{j-1} , hasta conseguir un ángulo interior en N_i lo suficientemente grande, sin que los elementos que contienen a N_i o N_{j-1} se deformen demasiado. Tras aplicar este cosido y el suavizado, el nuevo elemento generado, compuesto por los nodos N_{i-2} , N_{i-1} , N_i y N_{i+1} , no contiene en su interior ángulos inválidos; y además, el resto de elementos implicados tienen una calidad aceptable, tal y como se muestra en la parte derecha de la Figura 3.30.

3.2.1.7.3. Cosido de transiciones

Un caso particular para coser nodos interiores aparece cuando hay una diferencia significativa de tamaños entre los bordes de los elementos a cada lado de la grieta desde la punta de la misma. Para que los resultados del cosido sean satisfactorios, es necesario hacer un ajuste de tamaños en los bordes en la frontera de mallado que forman la punta de la grieta.

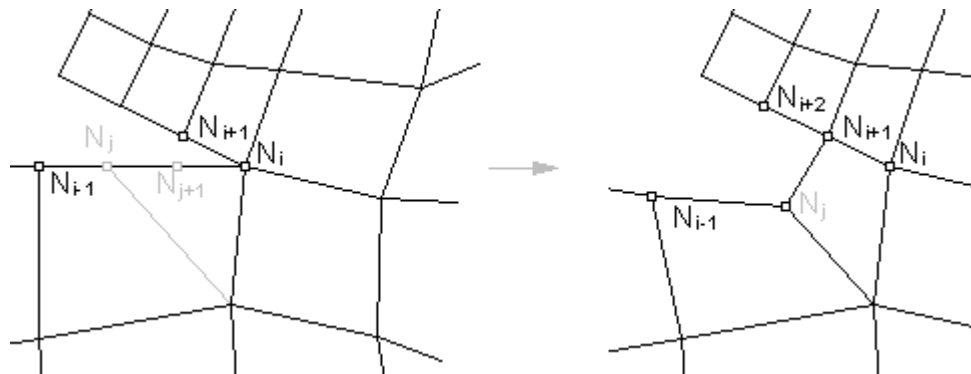


Figura 3.31: Cosido de transiciones.

En la parte izquierda de la Figura 3.31, se ilustra un ejemplo en el que se requiere un ajuste de tamaños previo al cosido. En color negro, se representan los nodos que forman la grieta, N_{i-1} , N_i y N_{i+1} , y los elementos originales que forman la grieta. En color gris, se muestran los dos nuevos nodos, N_j y N_{j+1} , insertados para corregir el tamaño de bordes previamente al cosido, y una línea que indica la división en dos hecha al elemento inicial por el borde de los nodos N_{i-1} y N_i , apareciendo un nuevo elemento con tres puntos alineados. En la parte derecha de la Figura 3.31, se muestra la malla y la frontera de mallado resultantes tras aplicar el ajuste de tamaños, el cosido de nodos interiores y el suavizado, donde se observa que uno de los nuevos nodos, N_{j+1} , se ha unido con N_{i+1} , y el otro, N_j , se ha movido hasta conseguir una calidad aceptable en todos los elementos implicados en el cosido.

3.2.1.8. Ajuste de filas

A diferencia del suavizado, que mejora la calidad de los elementos cuyos bordes forman la frontera de mallado actual, la función del ajuste de filas, como bien indica su nombre, es controlar el tamaño de borde de los elementos que forman la frontera de mallado.

Esta etapa se hace imprescindible en dos escenarios bien diferenciados: cuando los lazos de mallado contienen tramos curvos cóncavos o convexos, o cuando la separación de los nodos de la frontera de mallado no sea homogéneo.

La particularidad de los lazos curvos, es que los elementos que se generan van disminuyendo (curva cóncava-convergente) o aumentando (curva convexa-divergente) su tamaño en cada nueva fila, como ocurre en la circunferencia representada en la mitad izquierda de la Figura 3.32 o en el agujero circular de la derecha, respectivamente.

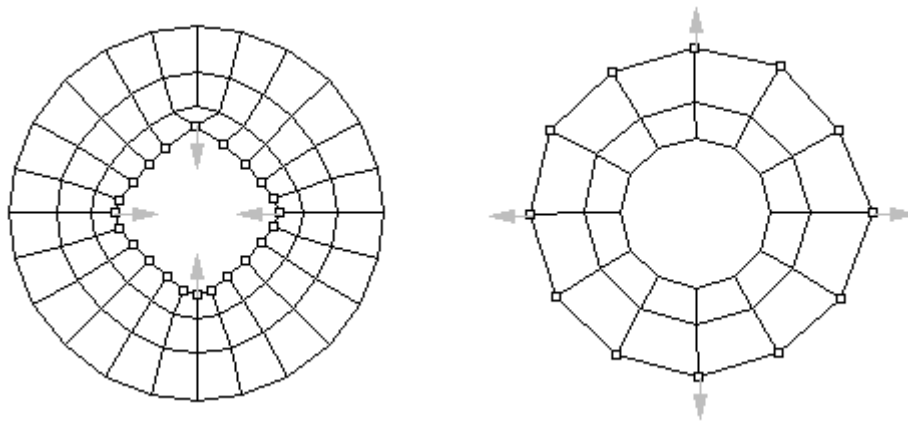


Figura 3.32: Frontera de mallado cóncava y convexa.

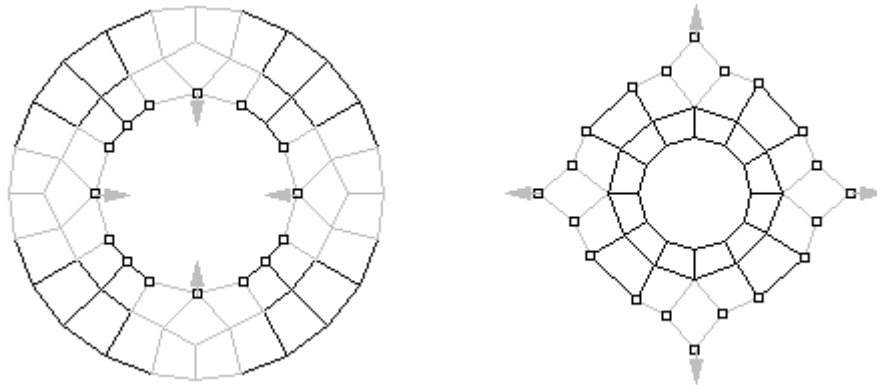


Figura 3.33: Ajuste de fila en frontera convergente o divergente.

El algoritmo de *paving* trata de forma diferente las dos situaciones expuestas en la Figura 3.32. A continuación, se resumen dos técnicas propuestas para resolver los problemas de fronteras de mallado convergentes o divergentes.

- Ajuste en tramos convergentes. Cuando la separación entre los nodos de la frontera de mallado disminuye a medida que se generan nuevas filas de elementos, se eliminan algunos de los últimos elementos insertados para que desde su posición, crezcan las dimensiones de los nuevos elementos, y así se corrija la convergencia de la frontera. La selección de los elementos a eliminar no

es aleatoria, y se hace de tal manera que caigan cuando la frontera de mallado ha variado aproximadamente 90 grados con respecto a último elemento eliminado. Donde se elimina un elemento, se hace un ajuste entre elementos vecinos para mantener la calidad de mallado. Tras aplicar el ajuste, el cosido y el suavizado, un ejemplo como el de la izquierda de la Figura 3.32 quedaría como se muestra en la parte izquierda de la Figura 3.33, donde todos los elementos modificados se han resaltado en color gris.

- Ajuste en tramos divergentes. Cuando la separación entre los nodos de la frontera de mallado aumenta a medida que se generan nuevas filas de elementos, se insertan nuevos elementos entre algunos de los últimos elementos generados para que desde su posición, disminuyan las dimensiones de los nuevos elementos, y así se corrija la divergencia de la frontera. La posición de los nuevos elementos no es aleatoria, y se hace de tal manera que caigan cuando la frontera de mallado varía aproximadamente 90 grados con respecto a último elemento insertado. Donde se inserta un elemento, se hace un ajuste entre los elementos vecinos para mantener la calidad de mallado. Tras aplicar el ajuste, el cosido y el suavizado, un ejemplo como el de la derecha de la Figura 3.32 quedaría como se muestra en la parte derecha de la Figura 3.33, donde todos los elementos modificados se han resaltado en color gris.

3.2.1.9. Comprobación del cierre

Antes de buscar el nodo inicial en una fila, siempre que se detiene la inserción de elementos en la fila seleccionada o se completan las operaciones de cosido, suavizado y ajuste de fila, se verifica si alguno de los lazos de mallado restantes tiene seis o menos nodos, en cuyo caso se evalúa si su distribución de nodos cumple uno de los patrones predefinidos, para cerrarlo directamente con las primitivas disponibles, sin necesidad de evaluar la calidad o las intersecciones de los elementos generados.

El criterio seleccionado para identificar los patrones a los que se ajustan los lazos, se basa en el número y tipo de sus nodos frontera, así como en la distribución de los mismos.

En la Figura 3.34 se muestran algunos de los patrones predefinidos implementados, en los que se muestran los nodos que forman los lazos de mallado y sus segmentos de unión en color negro, junto con los nuevos nodos insertados y las líneas divisorias entre los elementos generados en color gris.

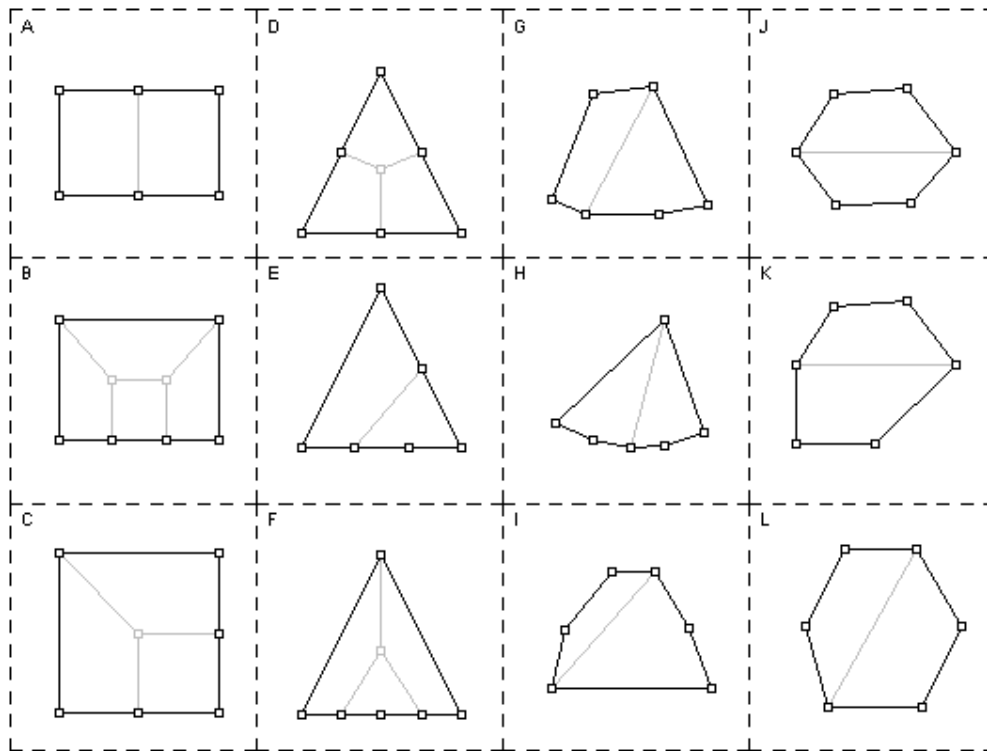


Figura 3.34: Patrones de cierre predefinidos.

Los patrones de la Figura 3.34 pueden agruparse en cuatro formas básicas: rectángulos para los casos A-C, triángulos para los casos D-F, sectores circulares para los casos G-I y círculos para los casos J-L. Cada uno ellos se identifica con unas determinadas características, por ejemplo, el caso A tiene dos grupos de nodos esquina consecutivos, separados entre sí por dos nodos laterales; mientras que el caso B tiene los cuatro nodos esquina consecutivos en el lazo de mallado contando a partir de los dos nodos laterales que hay, que además son vecinos; y el caso C tiene dos nodos laterales separados por un nodo esquina, y a continuación de esta secuencia, tres nodos esquina consecutivos.

3.2.1.10. La fábrica de elementos

Esta etapa recoge todo el proceso de generación de elementos, de forma que cada uno se trata individualmente cuando se genera, consiguiendo así un algoritmo más robusto que crea y evalúa de uno en uno los elementos, resultando más sencilla la corrección de deformaciones o intersecciones. [7]

En la fábrica de elementos, se realizan principalmente cuatro tareas: generación de elemento, evaluación de intersecciones, cosido y suavizado. Además, antes de comprobar las intersecciones se evalúa la calidad del elemento, de tal manera que si tiene ángulos demasiado pequeños o demasiado grandes, se descarta y no se realizan más operaciones.

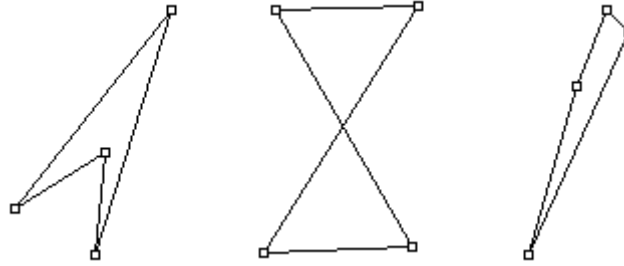


Figura 3.35: Elementos inválidos.

En la Figura 3.35 se muestran tres elementos que deben descartarse por no cumplir ciertos criterios de calidad, que se describen de izquierda a derecha: el primero de ellos tiene un ángulo interior mayor de 180° ; el segundo intersecciona con el mismo; y el tercero tiene un ángulo máximo cercano a 180° y un ángulo mínimo demasiado pequeño.

La fábrica de elementos genera nuevos elementos hasta completar una vuelta completa a la frontera de mallado inicial (fila terminada), hasta que se resuelve alguna intersección o hasta que se descarta el último elemento generado. Así, cuando se sale de la fábrica de elementos se hace la comprobación de cierres, el ajuste de filas, y si no ha finalizado el mallado, se busca el lazo y nodo de inicio para la próxima iteración de inserción de elementos.

3.2.1.11. Mejora del mallado final

A pesar de las etapas correctoras utilizadas durante la generación de elementos, es necesario hacer un estudio de la malla resultante para mejorar su calidad final.

La mayoría de mejoras a aplicar sobre los mallados se basan en la combinación o redistribución de elementos, bien sea para mejorar la calidad media de los elementos en estudio, o bien para mantener o empeorar levemente su calidad, con la finalidad de eliminar los nodos generados. Son muchos los criterios para mejorar la calidad de las mallas, e independientemente del algoritmo empleado para generarlas, conviene usar unos u otros según las características de la malla que se pretendan optimizar.

Para la finalidad del mallador desarrollado, interesa que los elementos que componen las mallas sean homogéneos tanto en tamaño como en formas, por lo que se evalúa para cada uno de ellos su forma y todas las conexiones que tienen los nodos que lo componen. En caso de que un elemento se deforme demasiado o alguno de sus nodos esté conectado a más o menos de cuatro elementos, se trata de corregir, teniendo en cuenta que los nodos frontera no se pueden modificar. Esta limpieza de la malla viene fuertemente condicionada por el

orden en el que se evalúan los elementos, ya que los elementos que se modifican ya no vuelven a ser evaluados, y si están en una región en la que la calidad inicial de la malla no es demasiado buena, puede ocurrir que la corrección hecha sobre elementos iniciales se deshaga, llegando incluso a empeorar su configuración original con correcciones realizadas sobre elementos próximos posteriores. [8], [9]

En el ejemplo de la Figura 3.36, se muestra la malla de una superficie con un lazo interior antes de aplicar la etapa de limpieza (a), y después de la limpieza (b). Comparando las zonas marcadas en color rojo, se observa que combinando los elementos iniciales, o recolocando los nodos que los forman, se consigue mejorar la calidad final de la malla.

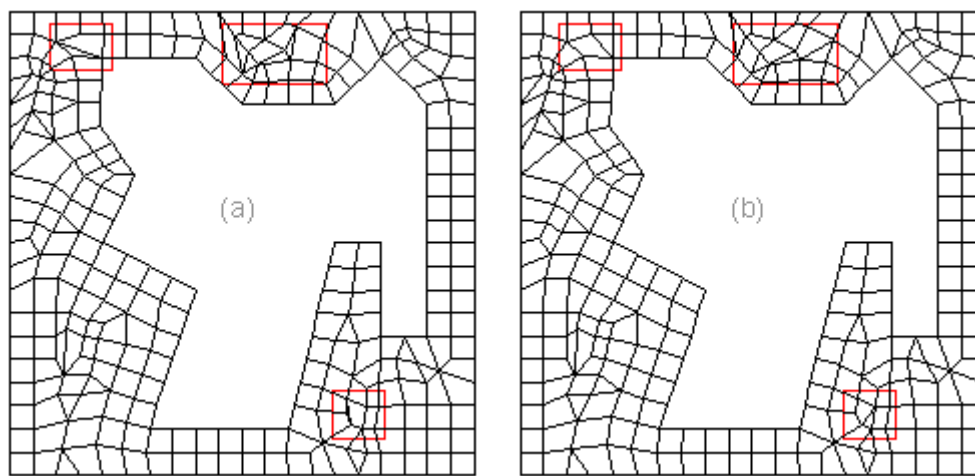


Figura 3.36: Superficie mallada antes de la etapa de limpieza (a) y después (b).

3.2.2. Técnicas adicionales

Al simular mallas resultantes del algoritmo desarrollado con diferentes métodos de la herramienta NewFasant [10], [11], se han ido realizando modificaciones sobre el mismo, a medida que se han ido encontrando deficiencias o inconvenientes sobre cada método.

Uno de los problemas, por ejemplo, para poder aplicar el Método de los Momentos (MoM) [1], [12], y obtener buenos resultados con una rápida convergencia, es que conviene que los elementos tengan tamaños y formas similares. Otro problema que se encuentra, ya sea sobre el MoM o usando Óptica Física (PO) para el cálculo de la Sección Radar (RCS) [12], [13], [14], es la aparición de elementos cuadrangulares con tres de sus esquinas alineadas, ya que al tratar posteriormente los elementos como superficies, cuando se interpolan aparecen irregularidades en el punto central de los tres alineados. Este caso se ilustra en la Figura 3.37, donde se representan los cuatro puntos esquina del elemento y sus curvas de contorno en color negro; y una alta resolución de sus líneas isoparamétricas en color gris. En el punto

alineado (el que tiene ángulo de 180°), se abren las líneas isoparamétricas, pudiendo ocasionar cierta inestabilidad en la búsqueda de puntos en la superficie o en el cálculo del vector normal a la misma en esa región. El caso más extremo se encuentra si en lugar de tener un punto alineado, su ángulo es mayor de 180° , ya que las líneas isoparamétricas de la superficie interpolada se cruzarán.

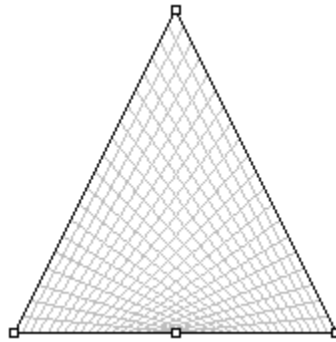


Figura 3.37: Superficie triangular.

La inserción de triángulos puros (sin puntos alineado) en ocasiones puntuales supone una mejora de resultados y convergencia. Como ejemplos: al permitir triángulos, se amplían los patrones de cierre identificados; también se generan triángulos en el ajuste de filas; y se contempla un nuevo caso particular en el que se puede comenzar una fila de elementos con un triángulo.

El otro aspecto importante a tener en cuenta es la generación de los puntos de control en los elementos, ya que su distribución condiciona la calidad de las superficies interpoladas a partir de ellos.

3.2.2.1. Inserción de triángulos

La aparición de triángulos surge para solucionar o facilitar algunos casos en los que no sea trivial mallar sin emplear elementos cuadrangulares que se deformen demasiado. No obstante, no conviene generar más triángulos de lo necesario, ya que si no se controla su forma y dimensiones, pueden aparecer problemas de convergencia e incrementarse notablemente el número de incógnitas a analizar.

Los triángulos generados se caracterizan por ser cuadrángulos con dos esquinas consecutivas coincidentes. Dicho de otra forma, son elementos cuadrangulares con un borde degenerado que confluye en un mismo punto, a diferencia de lo que ocurre en el caso mostrado en la Figura 3.37. Siguiendo el criterio de numeración de la Figura 3.2, y para trabajar más fácilmente con ellos, se crean de tal manera que sus esquinas coincidentes

siempre son la 3 y la 4 (y el punto de control 7, si se trata del post-procesado de la malla). Así, cualquier elemento triangular que se genera, se procesa para que tenga esta distribución de puntos de control.

Al permitir elementos triangulares, se elimina la restricción de que todos los lazos de mallado deban estar compuestos por un número par de nodos, por lo que se consiguen dos claras ventajas: no se condicionan los mallados de las superficies vecinas a la inserción de nodos frontera obligatorios para conseguir la paridad; y permite que se resuelvan más rápidamente las intersecciones, al no tener que descartar opciones que cumplen los requisitos de calidad pero no de paridad.

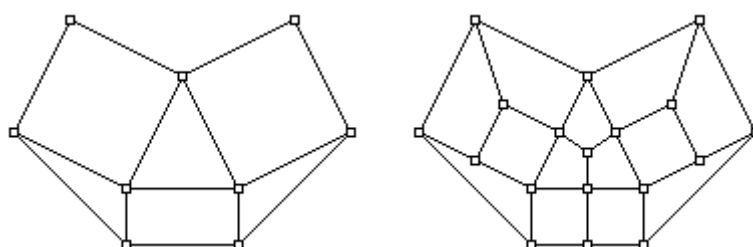


Figura 3.38: Mejora del mallado con la inserción de triángulos.

Para mostrar el problema de la paridad de nodos en las fronteras de mallado, se muestran tres superficies cuadrilaterales en contacto con tres superficies triangulares a la izquierda de la Figura 3.38. Se pretende mallar esta geometría con un tamaño de elementos mayor que las dimensiones de sus superficies teniendo continuidad en el mallado. Con la habilitación de elementos triangulares, la malla resultante coincide con la geometría de entrada, compuesta por 3 elementos triangulares, 3 cuadrilaterales y solo 9 nodos (28, incluyendo los puntos de control). Sin embargo, para mallar la misma geometría con elementos cuadrilaterales, se observa en la parte derecha de la figura, que es necesario insertar nodos frontera adicionales en los contornos de las superficies adyacentes a las triangulares, alterando así su distribución de nodos frontera ideal. La malla resultante de elementos cuadrangulares queda formada por 13 elementos (2 de ellos cuadrangulares con 3 nodos alineados) y 19 nodos (62, puntos con los de control), teniendo así una malla heterogénea con dimensiones más pequeñas que las deseadas.

Otro caso básico en el que se permiten elementos triangulares es cuando algún elemento cuadrangular presenta un ángulo interior próximo a 180 grados. Aunque estos parches no se permiten en la fábrica de elementos, pueden aparecer tras aplicar otras operaciones como el ajuste, el cosido o la limpieza final, ya que pueden mejorar ciertos

elementos pero a su vez alterar otros vecinos. Con esto, se tiene una mayor flexibilidad en las modificaciones que se hacen sobre los elementos ya generados.

3.2.2.2. Generación inicial de elementos alternativa en nodos esquina

Cuando las regiones a mallar están compuestas por varios lazos, y el tamaño de elemento deseado no es lo suficientemente pequeño como para evitar intersecciones entre los elementos iniciales de un lazo con alguna de las otras fronteras iniciales de mallado, puede ocurrir que no sea posible generar ningún elemento inicial válido con los patrones expuestos en el apartado 3.2.1.4. Solo en este caso particular, se trata de iniciar la fila con una combinación de la generación inicial desde nodos laterales con la de nodos esquina. Para ello, se inserta un elemento cuadrilateral en el que se permite un ángulo interior mayor de 180° , por lo que en si no se descarta o modifica por las posibles intersecciones que provoca, posteriormente se descompone en dos triángulos. Se genera con la intención de que sus lados candidatos a unir con otros segmentos frontera sean distintos a los ya descartados por los elementos generados con otros patrones, para así hacer una unión buena o en caso contrario, mallar desde el.

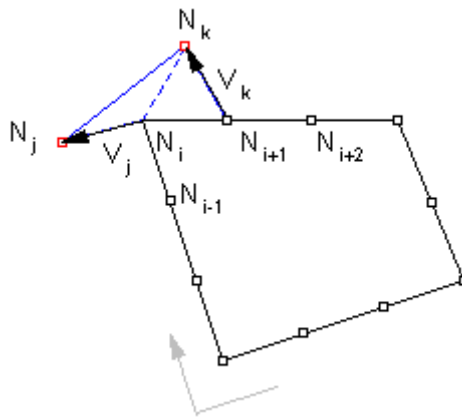


Figura 3.39: Proyección particular desde nodo esquina.

Con este nuevo método de inicio de fila, se genera un nuevo elemento, para el cual es necesario insertar dos nodos. La proyección de los nuevos nodos se explica siguiendo el ejemplo que se muestra en la Figura 3.39, donde se muestra el sentido del lazo de mallado en color gris, se denota como N_i al nodo actual, a su nodo anterior en el lazo de mallado como N_{i-1} , a su nodo posterior como N_{i+1} , al nodo siguiente a su posterior como N_{i+2} , y a los nodos proyectados como N_j y N_k , representados en color rojo. El ángulo interior de N_i se denota como α , y las distancias desde N_i hasta N_{i-1} y N_{i+1} son d_1 y d_2 , respectivamente. Análogamente, el ángulo interior de N_{i+1} se representa como β y la distancia desde N_{i+1} a N_{i+2}

es d_3 . Los nuevos nodos N_j y N_k se encuentran, respectivamente, en el extremo de los vectores V_j y V_k , cuyo origen son los nodos N_i y N_{i+1} , están orientados según las fracciones de $1/3$ de α y β en el sentido del lazo de mallado, respectivamente, y sus magnitudes se calculan como indican las expresiones (3.24) y (3.25).

$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\text{sen}(\alpha/3)} \quad (3.24)$$

$$|V_k| = \frac{(d_2 + d_3)/2}{\text{sen}(\beta/3)} \quad (3.25)$$

El elemento generado está compuesto por los nodos N_i , N_{i+1} , N_k y N_j , y la frontera de mallado, que antes de generar los elementos venía dada por la secuencia ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , N_{i+2} , ... se actualiza insertando los dos nodos proyectados entre el nodo actual y el siguiente, quedando la secuencia ..., N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_j , N_k , N_{i+1} , N_{i+2} , ...

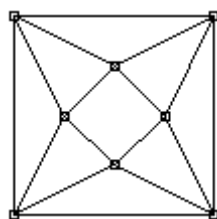


Figura 3.40: Ejemplo de nuevo inicio de fila.

En la Figura 3.40 se muestra el ejemplo de una placa cuadrada plana con un agujero cuadrado rotado 45° con respecto al lazo exterior. Si no se cierra con ningún patrón predefinido, la única forma de comenzar a mallar es con el nuevo patrón definido, ya que el elemento generado se une por uno de sus bordes (el que estaría compuesto por los nodos N_j y N_k , según el ejemplo de la Figura 3.39), con uno de los bordes del lazo exterior. Este ejemplo queda mallado únicamente con elementos triangulares, ya que todos los elementos cuadriláteros tienen un ángulo interno mayor de 180° , por lo que no se descartan al ser la última solución, y cuando se ha completado el mallado, se descomponen en triángulos.

3.2.2.3. Nuevos patrones de cierre

Hay casos, como el ejemplo anterior, que no se pueden mallar por la dificultad de generar un elemento correcto de inicio. Esto ocurre cuando hay varios lazos de mallado, y el problema se debe a que los elementos tienen en una o varias de sus esquinas nodos fijos que limitan sus bordes a unir, resultando especialmente complicado el resolver las intersecciones cuando los otros bordes candidatos también están formados por nodos frontera fijos.

Para minimizar el problema y aprovechando la ventaja de generar elementos triangulares, se implementan una serie de patrones que van desde el lazo simple compuesto por tres nodos esquina, a otros más complejos. Cuatro de estos casos se muestran en la Figura 3.41, diferenciándose principalmente en el número de nodos del lazo exterior.

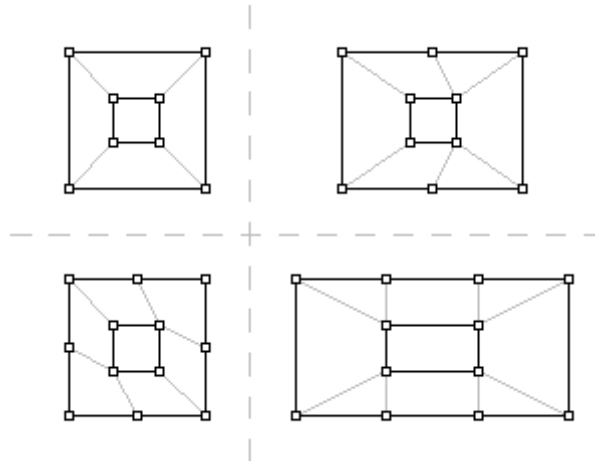


Figura 3.41: Nuevos patrones de cierre.

Una vez más, aprovechando la posibilidad de descomponer los elementos cuadrangulares en triángulos, y teniendo en cuenta que estos patrones se usan para cerrar lazos, se puede permitir cierta deformación en los ángulos internos mayores de los elementos cuadriláteros, siempre y cuando no presenten diferencias demasiado grandes en las dimensiones de sus lados.

3.2.2.4. Nuevo ajuste de filas

Para corregir la desviación en la separación entre los nodos de la última frontera de mallado resultante tras la inserción de elementos en la fila, se realizan tres tipos de ajustes: en primer lugar, se hace un ajuste rápido de las dimensiones de la fila; después, se aplica un ajuste local en los tramos en que disminuye demasiado la distancia entre nodos, y por último, otro ajuste local en los tramos en los que aumenta notablemente la frontera.

3.2.2.4.1. Ajustar fila

El primer ajuste se aplica a la fila completa, y únicamente trata de compensar la desviación de la separación media entre los nodos de la frontera de mallado con respecto al lado de elemento deseado. Para ello, se calcula la longitud media de los tramos de la frontera, distinguiendo dos posibilidades:

- La longitud media es menor que un cierto margen con respecto al tamaño deseado (se ha configurado con un margen de un 80 por ciento). En ese caso, se estima el número de nodos a descartar para equilibrar la longitud media. El número de nodos a eliminar se calcula teniendo en cuenta que no se pueden mover los nodos frontera, por lo que solo se unen los tramos de menor longitud que no están formados por nodos frontera, hasta equilibrar la longitud media. La expansión de bordes para ajustar la frontera es la misma que se aplica en *Aumentar frontera*.
- La longitud media es mayor que un cierto margen con respecto al tamaño deseado (se ha configurado con un margen de un 120 por cien). En ese caso, se estima el número de nodos necesarios para equilibrar la longitud media. El número de nodos a insertar se calcula teniendo en cuenta que no se pueden colocar entre nodos frontera, por lo que solo se dividen los tramos de mayor longitud que no están formados por nodos frontera, hasta equilibrar la longitud media. La división de bordes para ajustar la frontera es la misma que se aplica en *Ajustar frontera*.

3.2.2.4.2. Aumentar frontera

Se trata de un ajuste local, ya que se recorren todos los tramos de la frontera de mallado, corrigiendo solo aquellos cuya longitud es la mitad o menor que el lado deseado, y siempre y cuando no están compuestos por nodos frontera fijos.

Para escoger el nodo a eliminar, se trabaja solo con nodos que son esquina o a laterales, evitando también aquellos elementos que tienen triángulos conectados. Se evalúa tanto el nodo actual como su anterior y su siguiente.

Una vez escogidos los dos tramos a unir, se acerca el nodo siguiente hacia el actual (si el siguiente no es frontera), o el nodo anterior hacia el actual (si el siguiente es frontera y el anterior no), para así poder eliminar el nodo actual. Tras acercar los nodos adyacentes, se recorren los elementos que contienen tanto al nodo actual como al siguiente (suponiendo que este no es frontera), en los que se sustituye el nodo actual por el siguiente dentro del elemento, dando lugar a un elemento triangular. Además, el elemento triangular solo contiene un nodo en la frontera de mallado, por lo que se facilita que los bordes resultantes tras las modificaciones en los nodos puedan ser procesados posteriormente.

Si la frontera de mallado decrece homogéneamente, se realizan solo algunas correcciones, intentando que no sean consecutivas en la frontera, para que la convergencia de la frontera se suavice en las filas de elementos sucesivas gradualmente.

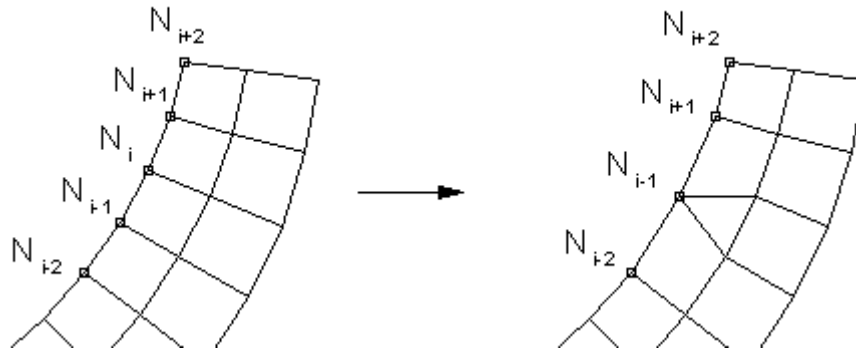


Figura 3.42: Aumento de la frontera en un tramo convergente.

Si la frontera de mallado decrece homogéneamente, se realizan solo algunas correcciones en zonas de la frontera de mallado no consecutivas, para que la convergencia de la frontera se corrija gradualmente en las filas de elementos sucesivas.

En la parte izquierda de la Figura 3.42, se representa un tramo del mallado interior de una circunferencia, en la que a medida que se insertan elementos, el tamaño de la frontera (y consecuentemente de los nuevos elementos) disminuye poco a poco. Para solucionarlo con la técnica propuesta, se procesa el tramo de la frontera de mallado compuesto por los nodos N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , y N_{i+2} , acercando el nodo N_{i-1} hacia N_i , y reemplazando posteriormente el nodo N_i en todos los elementos que lo contienen por N_{i-1} . Como resultado, en la parte derecha de la figura, se mantienen una serie de tramos en la frontera de mallado de pequeña longitud, y dos tramos consecutivos de mayor longitud, resultantes del ajuste, a partir de los cuales se generan elementos ligeramente mayores que tienden a ajustar gradualmente las dimensiones de los parches de la malla a las deseadas.

3.2.2.4.3. Ajustar frontera

También se trata de un ajuste local, ya que se recorren todos los tramos de la frontera de mallado, corrigiendo solo aquellos cuya longitud es mayor que un factor del tamaño deseado predeterminado, y siempre y cuando no están compuestos por nodos frontera fijos.

En este caso, se admiten todo tipo de nodos. Los candidatos son aquellos que se encuentran en tramos con una longitud demasiado grande en comparación con el tamaño de lado de elemento deseado. Si la frontera de mallado crece homogéneamente, se realizan solo algunas correcciones, evitando sean consecutivas, para que la divergencia de la frontera se suavice gradualmente en las filas de elementos sucesivas.

Se calcula el número de nodos nuevos que hay que insertar, y se colocan para dividir los tramos de mayor separación entre sus nodos en la frontera de mallado. Para escoger la posición de los nuevos nodos, se evitan aquellas posiciones en las que ya hay triángulos conectados a su nodo siguiente o posterior. Al dividir los tramos seleccionados, se mueven dos nodos: el actual y el siguiente, o el actual y el anterior, separándolos una distancia razonable para insertar una nueva división entre ellos, sin que aparezcan elementos irregulares y evitando grandes transiciones de longitud entre tramos sucesivos. Tras hacer la división, se recorren todos los elementos que contienen a los nodos implicados, sustituyendo en ellos uno de los nodos existentes desplazados por el nuevo nodo. Para completar la fila, se genera un nuevo elemento que contiene al nodo sustituido de los elementos, al nodo interior al que estaba conectado, y al nuevo nodo generado.

El proceso de reducción del tamaño de la frontera de mallado se explica con el ejemplo de la Figura 3.43. En la parte de la derecha, se representa un disco que se está mallando de dentro hacia fuera, ya con dos filas de elementos generadas, en el que la separación entre nodos de la frontera actual duplica a la original. En la parte derecha, se han insertado 5 nuevos nodos (con sus triángulos asociados) en posiciones no consecutivas, para así conseguir una frontera admisiblemente homogénea y del tamaño adecuado. Concretamente, se resalta el procesado de la secuencia equidistante de nodos N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_{i+1} , y N_{i+2} , acercando N_i hacia N_{i-1} , e insertando el nodo N_j entre la posición de N_i y N_{i+1} . Con esto, la nueva secuencia está formada por N_{i-2} , N_{i-1} , N_i , N_j , N_{i+1} , y N_{i+2} , en la que separación entre N_{i-2} y N_{i-1} sigue siendo demasiado grande, pero se verá reducida en las sucesivas iteraciones por la menor separación entre N_{i-1} y N_j . Lo mismo ocurre con los nodos N_j , N_{i+1} y N_{i+2} .

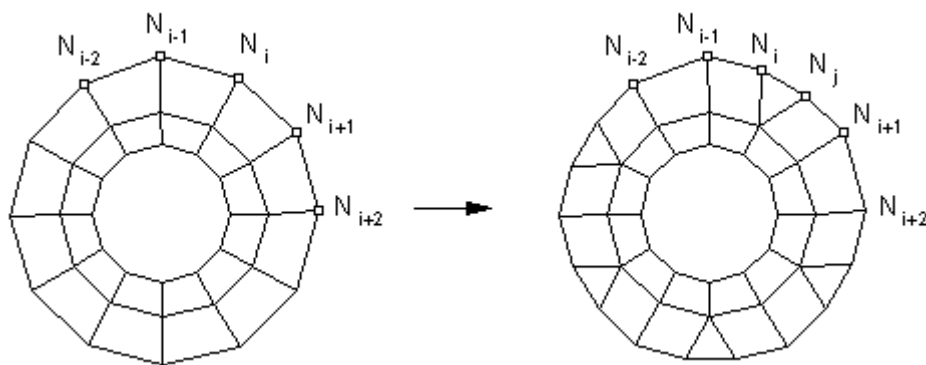


Figura 3.43: Reducción de la frontera en un tramo divergente.

3.2.2.5. Inserción de puntos de control

Como ya se introdujo en la sección 3.2, más concretamente, con la Figura 3.2 y la Figura 3.3, los elementos de la malla están compuestos por una red de 9 puntos que pueden

ser interpolados como superficies NURBS de formas suaves, garantizando una alta calidad en la representación de cualquier forma arbitraria con poca información.

No obstante, la posición de los puntos intermedios (numerados de 5 a 9 en la Figura 3.2), debe ser correcta para que las superficies interpoladas realmente representen la forma de la geometría original, ya que en ocasiones pueden distorsionar la realidad. La posición óptima de los nodos intermedios en los contornos del elemento (5 a 8), es el punto medio entre los vértices del elemento que forman los lados. El punto central del elemento (9), es el caso más particular, ya que su posición no es trivial. Como norma general, se ha concluido heurísticamente que la posición óptima para el nodo central es aquella que se encuentra en el centro de los nodos intermedios contenidos en bordes no consecutivos del elemento (entre los nodos 5 y 7, o 6 y 8). Aclarar que cuando se habla de punto central o intermedio entre dos coordenadas del elemento, en realidad se trata de un punto contenido en la superficie original.

La importancia del punto central del elemento se ve especialmente destacada en el caso de los elementos triangulares, ya que condiciona la calidad de la superficie interpolada desde sus puntos de control, más aún en casos curvos. Así, se busca que las líneas isoparamétricas de la superficie interpolada a partir del elemento sean lo más sencillas y regulares posible. Para entender esta influencia, basta tomar como ejemplo los dos elementos triangulares mostrados en la Figura 3.44, donde se representan los contornos y puntos de control de los elementos en color negro, y las líneas isoparamétricas de sus superficies interpoladas en color gris, con la única diferencia entre ellos de la posición del punto central. En el caso de la izquierda, el punto central corresponde al baricentro del triángulo y se obtienen líneas isoparamétricas curvadas, mientras que en el caso de la derecha, se encuentra entre los dos puntos de control laterales más cercanos del elemento, presentando así una distribución de líneas isoparamétricas más sencilla y regular.

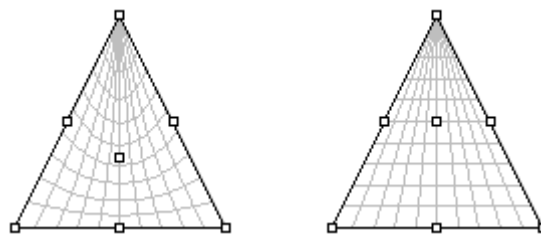


Figura 3.44: Interpolación de elementos triangulares.

Además de la posición de los puntos de control, para que el algoritmo de mallado sea lo más eficiente posible, conviene decidir cuál es el mejor momento para insertar los puntos de control sobre los elementos.

Una primera idea es insertar los puntos de control a medida que se generan los elementos. Esta solución resulta poco eficiente, ya que por una parte, los elementos pueden sufrir numerosas modificaciones desde que se generan hasta que finaliza el mallado; y por otra parte, habría que mantener siempre la información adicional sobre qué elementos comparten nodos intermedios, para garantizar la continuidad final en la malla.

Ante los inconvenientes de la primera solución, parece razonable insertar los puntos de control una vez que se ha completado el mallado, ya que es rápido y se asegura que no se modifican posteriormente los elementos. No obstante, se tratan de forma particular los nodos permanentes intermedios iniciales, que se generan a la vez que los nodos fijos en las fronteras de las superficies antes de mallar (equidistantes entre los intermedios), y se cargan al final de mallado en los lados de los elementos que se encuentran en los contornos de las superficies.

A modo de resumen, antes de mallar se generan los nodos permanentes en las fronteras de las superficies originales, guardando en los intermedios la información de los nodos fijos (que forman parte de los vértices de los elementos) a los que están conectados. Al final de mallado, se recorren todos los elementos generados, insertando nuevos nodos intermedios entre las esquinas de los elementos que no se han procesado (los que no son fijos), o cargando los existentes cuando ya hayan sido procesados, ya sea al inicio o al final del mallado.

3.2.3. Estructura final del algoritmo de mallado implementado

Una vez que se ha explicado cada una de las etapas del mallador, conviene recapitularlas brevemente a modo de resumen. En la Figura 3.45 se sintetiza, mediante pseudocódigo, la estructura final del algoritmo de mallado superficial implementado. Cabe destacar, que el primer paso del algoritmo, denotado como “evaluar continuidades”, no se ha presentado todavía ya que se detallará posteriormente en el *Capítulo 4*.

```

repetir
    EVALUAR CONTINUIDADES
hasta FIN SUPERFICIES
repetir
    GENERAR NODOS PERMANENTES
hasta FIN SUPERFICIES
repetir
    SELECCIONAR INICIO
    repetir
        INSERTAR ELEMENTO

```

```

EVALUAR ELEMENTO
si INTERSECCION entonces
    RESOLVER INTERSECCION
    DETENER FILA
fin condición
SUAVIZAR FRONTERA
COSER ELEMENTOS
hasta FIN FILA o DETENER FILA
AJUSTAR FILA
hasta SUPERFICIE MALLADA
MEJORAR CALIDAD MALLA
GENERAR PUNTOS DE CONTROL
hasta FIN SUPERFICIES

```

Figura 3.45: Pseudocódigo del algoritmo de mallado.

3.3. APROXIMACIÓN VOLUMÉTRICA DE DIELECTRICOS DE CAPA FINA

Tal y como ya se adelantó en la introducción del capítulo, hay un caso particular en el que se aproximan volúmenes de un espesor muy pequeño por medio de capas paralelas obtenidas con el algoritmo de mallado superficial. Esta aproximación se suele utilizar para estudiar el comportamiento de cuerpos dieléctricos macizos de pequeño espesor.

La Figura 3.46 muestra el ejemplo de un sector cilíndrico con un espesor lo suficientemente pequeño como para analizarlo con la aproximación de capa fina. En color negro, se representan los contornos originales del objeto volumétrico, mientras que en gris, se muestra la malla interior resultante después del mallado. Se observa que en este caso, la malla está compuesta por una sola capa interior que respeta la forma del objeto original.

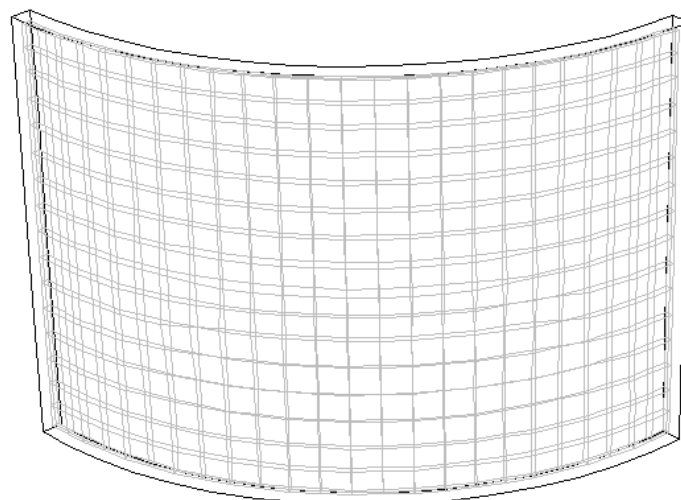


Figura 3.46: Sector cilíndrico mallado con la aproximación dieléctrica de capa fina.

En realidad, la salida de este modo de mallado es una malla superficial, compuesta por tantas capas paralelas como requieran los volúmenes a la frecuencia de análisis. La malla se consigue, por tanto, aplicando el algoritmo de mallado superficial explicado en la sección 3.2 al objeto de interés, y al finalizar el mismo, se aplica una etapa específica de post-procesado para determinar cuántas capas es necesario utilizar y sus respectivas mallas. Aquellos volúmenes a los que se les aplica la aproximación dieléctrica de capa fina, tienen un aspecto final similar al de una cebolla compuesta por una o varias capas.

Una vez conocida la técnica de mallado superficial, y de forma resumida, las características del mallado volumétrico de dieléctricos de capa fina, la etapa de post-procesado para generar las capas paralelas de la malla se explicará con más detalle en el capítulo de *Optimización de los Algoritmos de Mallado*.

3.4. MALLADO VOLUMÉTRICO

La discretización de volúmenes, modelados únicamente por las superficies delimitadoras de los cuerpos, resulta una tarea mucho más compleja que el mallado superficial. [15], [16]

La primera decisión a tomar es la forma deseada del elemento base que compone la malla: tetraedros, hexaedros, octaedros,... Al igual que para el mallado superficial se ha optado por elementos cuadrilaterales, se ha escogido como objeto elemental para el mallado volumétrico el hexaedro, para mantener una analogía en el análisis de casos superficiales-volumétricos. La versión volumétrica del algoritmo de *paving*, denominada como *plastering* [17], resulta mucho más compleja e inestable, tanto en la generación de elementos como en la detección de intersecciones.

Ante la alta dificultad para representar formas arbitrarias mediante hexaedros, se desarrolla una primera aproximación de la forma del volumen, basada en los conceptos de las técnicas de *mallado por rejilla* [18] y *octree* [19], [20], [21], compuesta por paralelepípedos perfectos. Esta malla es imprecisa en la corteza del cuerpo, pero garantiza una rápida convergencia en el análisis, por tener una estructura sencilla y homogénea de elementos. El *algoritmo de cubicado*, como así se ha denominado, es la base principal de la versión volumétrica implementada y permite representar mediante cubos la forma general del volumen, bien aproximada general, o bien aproximada interior solo con elementos interiores.

Una extensión de la primera aproximación consiste en generar una capa adicional a la malla de hexaedros interior, para tratar de unir los cubos que aproximan la forma del objeto, con la corteza exterior del volumen. Esta nueva capa está compuesta por paralelepípedos, que generalmente no son perfectos y presentan una ligera deformación con respecto a los cubos interiores, pero que sirve para aumentar considerablemente la precisión en la discretización del cuerpo.

El algoritmo para discretizar los cuerpos mediante volúmenes es muy sencillo, aunque tiene el inconveniente de perder ciertos detalles en la corteza exterior de los cuerpos cuando la geometría tiene características específicas, como se verá más adelante. No obstante, con una alta resolución de mallado (cubos suficientemente pequeños con respecto a las dimensiones del objeto), el error cometido en la forma se minimiza y se consiguen así resultados más que aceptables.

3.4.1. Algoritmo de cubicado

La técnica de cubicado se basa simplemente en la generación de una rejilla estructurada de puntos, separados una distancia igual al lado deseado de elementos y que contienen en su interior al volumen de interés, para clasificarlos posteriormente como interiores o exteriores al mismo. Una vez identificados los puntos interiores al volumen, se genera un cubo para cada uno de ellos.

Este algoritmo es extremadamente sencillo y rápido, ya que no son necesarias etapas de evaluación de calidad de los elementos, de verificación de intersecciones ni de ajuste o refinado de la malla.

Como resumen, es posible cubicar cualquier volumen cerrado en tres pasos:

1. *Generación de rejilla estructurada.* En primer lugar se estudia el volumen para generar la rejilla de puntos equidistantes a evaluar.
2. *Clasificación de puntos.* Cada punto de interés debe ser seleccionado o descartado, dependiendo de si es interior o exterior a la región de interés dentro del volumen. Por ejemplo, si se tiene una esfera dentro de otra, la región de interés es la delimitada entre las cortezas de las dos esferas.
3. *Generación de cubos.* Se generan tantos cubos como puntos válidos hay, asegurando que los cubos adyacentes compartan una de sus caras entre sí.

3.4.1.1. Visión en 2D del algoritmo

Para que resulte más sencillo entender el algoritmo apoyándose en figuras, cada uno de los pasos se explica mediante su versión simplificada en dos dimensiones, ya que la representación es más clara. Así pues, la versión bidimensional del algoritmo es meramente explicativa.

El algoritmo se explica sobre superficies planas, cuyos contornos vienen representados por líneas, y los elementos generados son cuadrangulares o rectangulares, según las especificaciones en cada dirección del espacio cartesiano. El algoritmo tridimensional funciona exactamente igual, donde las superficies son análogas a las curvas de contorno delimitadoras de la región de interés, y los hexaedros son equivalentes a los cuadrados planos.

Los tres pasos básicos del algoritmo simplificado a un caso bidimensional se muestran en la Figura 3.47: en la parte izquierda, se representa en color negro el contorno de la superficie que se desea mallar, y en gris la rejilla estructurada de puntos calculada para esa superficie. En la parte derecha, se diferencian los puntos interiores (azules) de los exteriores (rojos), además de representar en color gris los elementos cuadrilaterales resultantes. Como se puede observar, la malla de salida no representa fielmente la forma de la geometría de entrada, pero a medida que se aumenta la resolución de la rejilla, se reduce el error cometido en la aproximación. La verdadera versión volumétrica tridimensional de este ejemplo es una esfera aproximada con la malla mediante cubos.

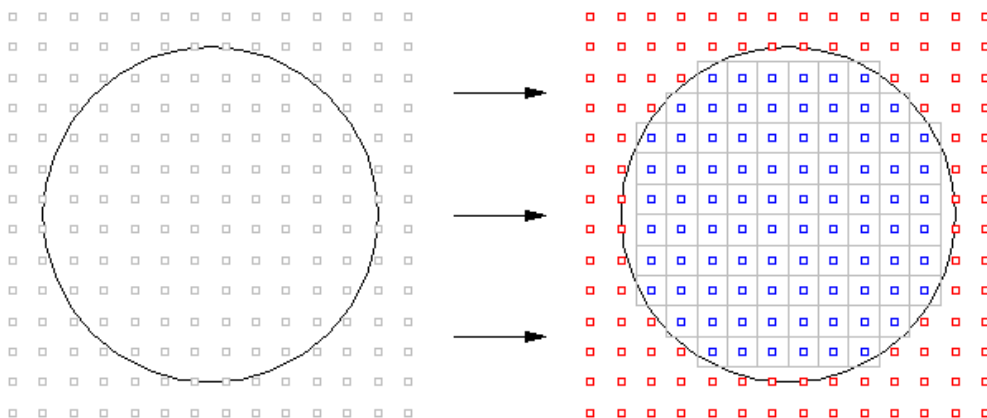


Figura 3.47: Ejemplo de mallado volumétrico en 2D.

A partir de ahora, y por tratarse de problemas equivalentes, siempre que se hable de malla se puede estar haciendo referencia tanto a una de rectángulos en dos dimensiones como a una de cubos en tres dimensiones, identificando claramente de cual se trata por el contexto. Lo mismo ocurre con los elementos cuadrangulares/cúbicos, o con las líneas/superficies

delimitadoras de la región a mallar, que se llamarán a partir de ahora indistintamente elementos (de la malla) o contornos de la superficie o volumen a mallar.

3.4.1.2. Generación de la rejilla estructurada

El primer requisito para conseguir una malla fiable es disponer de una nube de puntos válida que sirva para identificar con precisión la forma del objeto. Como se desea una malla sencilla compuesta por elementos cuadrangulares, los puntos que componen la rejilla deben ser equidistantes. Por tanto, la separación según los ejes cartesianos entre el mismo punto de dos elementos adyacentes en x , y , y z , se denota como dx , dy , y dz , respectivamente.

Para calcular todos los puntos posibles, se calcula una caja contenedora que abarca todas las superficies que delimitan el objeto. Conociendo los límites de dicha caja, que son siempre fijos para un mismo objeto, se genera la nube de puntos para esa caja con la resolución deseada.

A la hora de generar los puntos, se distinguen dos tipos:

- *Puntos centrales de los elementos.* Están en el centro de los elementos a generar, y son los que se clasifican como interiores o exteriores. Se trata de los representados en la Figura 3.47.
- *Puntos esquina de los elementos.* Son los que realmente componen los elementos, pero solo se generan para los puntos centrales clasificados como interiores. En parte derecha de la Figura 3.47, son los que se encuentran en las esquinas de los elementos.

Los dos tipos de puntos son equidistantes en x , y , y z , respectivamente.

3.4.1.3. Clasificación de puntos

La identificación de puntos como interiores o exteriores es la tarea más compleja e importante del algoritmo de cubicado.

Cada punto es tratado de forma independiente, y su clasificación se basa en un trazado de rayos particular en el que es necesario lanzar un rayo, generalmente arbitrario, que parte del punto y tienda a infinito. Estudiando el número de cortes, n , que produce el rayo arbitrario con los contornos del volumen, es posible saber con una alta probabilidad, si el punto es interior o exterior al volumen.

- Si n es 0, o un número par, el punto es exterior al volumen.
- Si n es un número impar, el punto es interior al volumen.

Además, hay que evaluar el ángulo entre el rayo trazado y el vector normal a la superficie de contorno en el punto de corte, ya que cuando estos son perpendiculares (rayo tangente a la corteza del objeto), ese corte no se debe tener en cuenta en el cálculo de n .

A modo de ejemplo, se han tomado dos puntos centrales, P_1 y P_2 , de los representados anteriormente en el caso de la circunferencia plana, para evaluar si son interiores o exteriores trabajando con diferentes rayos, representados con diferentes colores y numeración en la Figura 3.48. A continuación se analiza cada uno de los puntos, con sus diferentes rayos:

- Punto P_1 , rayo R_{11} : $n = 2$, de modo que es un punto exterior.
- Punto P_1 , rayo R_{12} : $n = 0$, ya que en el corte encontrado, el rayo es tangente al contorno frontera y no se tiene en cuenta, por lo que es un punto exterior.
- Punto P_1 , rayo R_{13} : $n = 0$, así que es un punto exterior
- Punto P_2 , rayo R_{21} : $n = 1$, luego se trata de un punto interior.
- Punto P_2 , rayo R_{22} : $n = 1$, de modo que se clasifica como un punto interior.
- Punto P_2 , rayo R_{23} : $n = 1$, así que se trata de un punto interior.

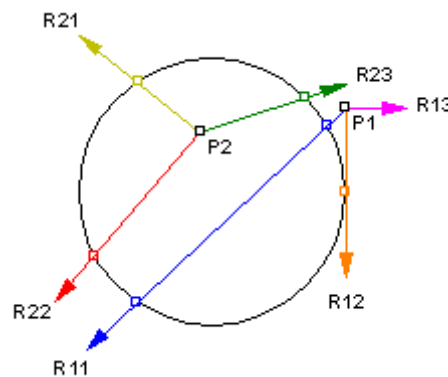


Figura 3.48: Identificación de puntos interiores.

La identificación de cortes en los contornos del volumen se realiza con una búsqueda de puntos en las superficies mediante algoritmos de minimización, como es el gradiente conjugado [6], por lo que el tiempo de esta etapa puede incrementarse considerablemente a medida que aumenta el número de puntos a analizar. Dado un punto arbitrario P , y una dirección de proyección desde el mismo, \vec{d} , para evaluar si se la proyección corta a una superficie arbitraria, se busca un punto sobre la superficie, P' , tal que se encuentre en la dirección \vec{d} , vista desde P . Este proceso se representa en el ejemplo de la Figura 3.49, en el

que la búsqueda de puntos de corte, en la dirección \vec{d} y desde el punto P , sobre la superficie ha iterado 5 veces, P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 , y finalmente, P' . Esta búsqueda de cortes se realiza desde todos los puntos y sobre todas las superficies que componen el contorno del volumen.

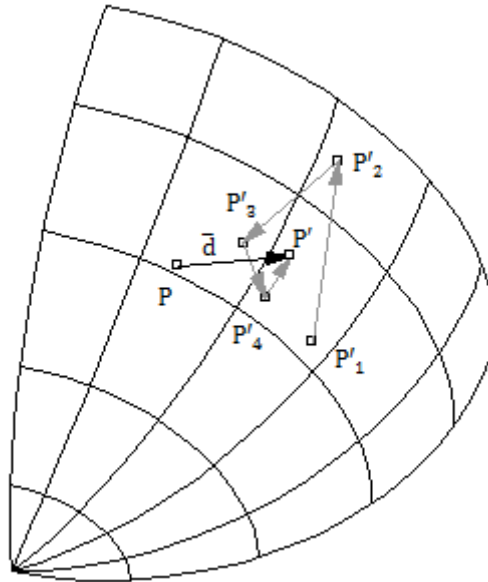


Figura 3.49: Identificación del corte en una superficie.

Para optimizar la clasificación de puntos, se recurre a dos técnicas de aceleración que reducen notablemente los tiempos requeridos:

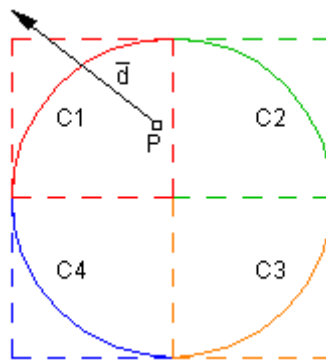


Figura 3.50: Búsqueda de cortes usando cajas contenedoras.

- La primera de ellas consiste en utilizar cajas contenedoras de las superficies delimitadoras del volumen, para comprobar si el rayo corta con ellas o no antes de evaluar los cortes, que siempre resulta más complejo. Este criterio de descarte hace que solo se realice la búsqueda en aquellas superficies que tengan una alta probabilidad de tener cortes.

Siguiendo con el ejemplo de la circunferencia bidimensional, suponer que son cuatro las curvas de contorno delimitadoras de la misma: $C1$, $C2$, $C3$ y $C4$,

representadas en la Figura 3.50 en diferentes colores con línea continua; mientras que en líneas discontinuas se representan sus cajas contenedoras. Si en este caso, se desea buscar los cortes que se producen al proyectar desde el punto P con la dirección \vec{d} sobre la circunferencia, la preselección por cajas contenedoras descarta a las curvas $C2$, $C3$ y $C4$, por lo que únicamente se realiza la búsqueda de puntos sobre $C1$, en la que se encuentra un punto de corte.

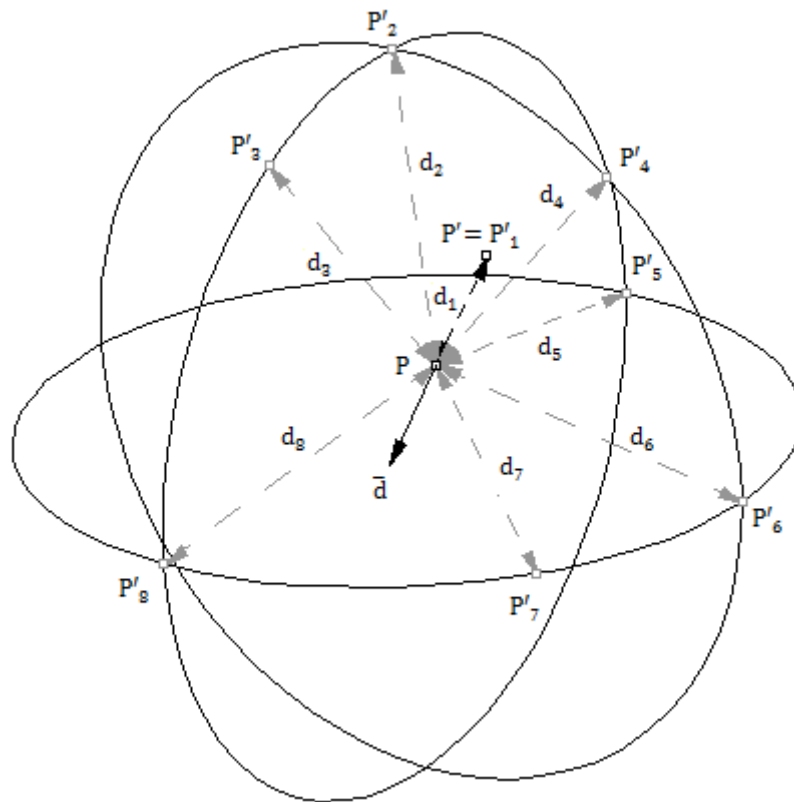


Figura 3.51: Cálculo de la dirección de proyección.

- La segunda técnica consiste en escoger la dirección adecuada del rayo de proyección, ya que cuantos más cortes haya que evaluar para un mismo punto, más tiempo requerirá el algoritmo. A modo de ejemplo, siguiendo con la Figura 3.48, para el punto $P1$ el rayo óptimo es $R13$, que no tiene ningún corte, y el peor es $R11$, que tiene 2 cortes diferentes. Para el caso del punto $P2$, no importa la dirección del rayo, ya que cualquiera encuentra el mismo número de cortes. Para seleccionar la dirección óptima de proyección \vec{d} , desde un punto P , se busca el punto sobre la corteza del volumen P' que minimiza la distancia con respecto a P . Es necesario buscar los puntos que minimizan la distancia respecto a P para todas las superficies que componen el contorno del volumen, y seleccionar el que

proporciona la menor distancia respecto a P , que es P' . Una vez encontrado P' , la dirección de proyección se calcula como $\vec{d} = P - P'$.

Pasando al caso volumétrico para ilustrar el proceso con un ejemplo, en la Figura 3.51 se representa una esfera modelada con 8 superficies, delimitadas por sus curvas de contorno, para la que se desea encontrar la dirección de proyección óptima \vec{d} desde el punto P . Como se tienen 8 superficies de entrada, se obtienen 8 puntos P'_1, P'_2, \dots, P'_8 , sobre estas, que minimizan la distancia con respecto a P : d_1, d_2, \dots, d_8 . Como la distancia mínima encontrada es d_1 , la dirección de proyección se calcula como: $\vec{d} = P - P' = P - P'_1$.

3.4.1.4. Generación de cubos

Conociendo las coordenadas del centro de los puntos clasificados como interiores al objeto, y la separación entre puntos adyacentes en la rejilla, dx , dy , y dz , se pueden obtener todas las esquinas de los elementos, simplemente sumando o restando a la posición del punto central la mitad de los incrementos según los ejes.

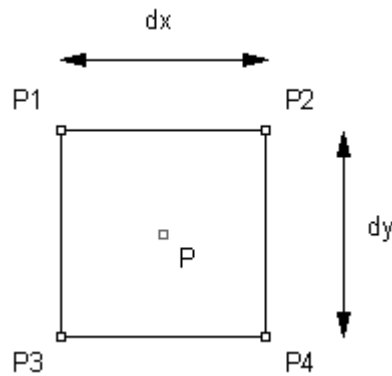


Figura 3.52: Punto central y esquinas de un elemento.

Continuando con un ejemplo bidimensional, se representa en la Figura 3.52 un cuadrado con sus cuatro esquinas $P1, P2, P3$ y $P4$, además de su punto central P , y las dimensiones de elementos según los ejes x e y , dx y dy . Como se ha comentado anteriormente, cada una de las esquinas del elemento se genera a partir de las dimensiones según los ejes y su punto central, siguiendo la relación (3.26). Para trasladar el ejemplo al caso real tridimensional, basta con añadir las variaciones en la coordenada z , pasando así de tener 4 puntos esquina a 8.

$$\begin{aligned}
P1(x, y) &= \left(P(x) - \frac{dx}{2}, P(y) + \frac{dy}{2} \right) \\
P2(x, y) &= \left(P(x) + \frac{dx}{2}, P(y) + \frac{dy}{2} \right) \\
P3(x, y) &= \left(P(x) - \frac{dx}{2}, P(y) - \frac{dy}{2} \right) \\
P4(x, y) &= \left(P(x) + \frac{dx}{2}, P(y) - \frac{dy}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Al igual que ocurría con el mallado superficial, para garantizar la continuidad entre elementos en contacto, es necesario que coincidan los índices de sus puntos compartidos, en lugar de las coordenadas. Con esto, se reduce la información de salida y se agiliza el post-procesado para saber qué elementos están en contacto, al tener que comprobar únicamente los índices de sus esquinas, en lugar de sus coordenadas.

3.4.1.5. Aproximación de la forma del volumen

Una vez explicado el algoritmo, es posible distinguir entre dos modos básicos de funcionamiento.

El primero de ellos se basa en la aproximación simple de la forma del volumen. Esto se consigue evaluando únicamente los puntos centrales de los cubos, tal y como se ha explicado en los apartados anteriores. Mediante esta técnica, se garantiza que el centro de los elementos, y generalmente, la mayor parte del cubo, cae dentro del volumen a mallar. Se trata de la aproximación bidimensional mostrada en la parte derecha de la Figura 3.47. No obstante, los elementos que se encuentran más cerca a los contornos de la región de mallado, pueden contener algunas de sus esquinas fuera del volumen. Por lo general, el promedio de la parte de la malla que sobresale del volumen original y los huecos que aparecen cerca de los contornos por caer algunos puntos centrales fuera del volumen, tiende a cero a medida que aumenta la densidad de la malla.

Este método es rápido y sencillo. No obstante, a veces no es posible aplicar esta aproximación, ya que se requiere que toda la malla de salida esté contenida perfectamente en el interior del volumen. Es por ello que surge la segunda técnica, o aproximación interior.

3.4.1.6. Aproximación interior de la forma del volumen

En algunos casos, es un requisito indispensable que la malla de salida sea interior al volumen, como ocurre cuando se desea unir la aproximación de cubos obtenida con la corteza exterior del volumen.

El proceso para garantizar que la malla está contenida en el volumen es el mismo que el explicado en las secciones previas, con la particularidad de que después de marcar los puntos de la rejilla como interiores o exteriores se lleva a cabo una segunda clasificación de los marcados como interiores, evaluando entonces si los puntos esquina de su correspondiente elemento son también interiores o no. Cuando se encuentra una esquina de elemento exterior al volumen, automáticamente se marca el punto central como exterior.

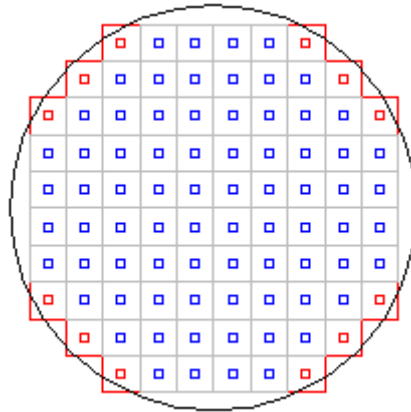


Figura 3.53: Ejemplo de aproximación interior del mallado volumétrico 2D.

Tomando como ejemplo el ya mostrado anteriormente en la Figura 3.47, si se vuelve a mallar aplicando el criterio de aproximación interior se descartan 12 puntos centrales de la rejilla (y por tanto, sus elementos) que anteriormente fueron admitidos como válidos. Los nuevos puntos y elementos descartados se resaltan en color rojo en la Figura 3.53.

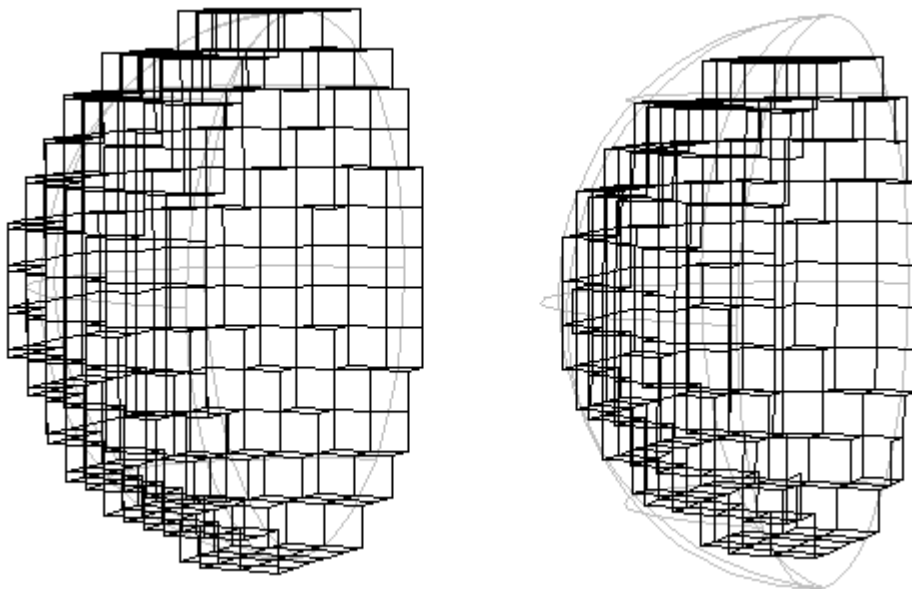


Figura 3.54: Comparación de las aproximaciones de mallado volumétrico en una esfera.

En la Figura 3.54 se representa la mitad de una esfera completa mallada empleando la aproximación de la forma de volumen frente a la aproximación interior, junto con la corteza real de la esfera, para observar las diferencias en un caso real tridimensional. La malla de la izquierda se corresponde con la aproximación de la forma del volumen, en la que como se ha explicado previamente, hay zonas en las que la malla sobresale del volumen y otras en las que los cubos quedan separados por la parte interior hasta la corteza. Por el contrario, la malla de la derecha es completamente interior al volumen, y las distancias desde la capa de la malla hasta la corteza de la esfera son siempre igual o mayores que las conseguidas en el primer caso. Observar que únicamente se ha representado la mitad de la capa exterior de elementos para facilitar la visualización, pero realmente, la capa exterior sigue la forma de toda la esfera y su interior está relleno de elementos cúbicos.

3.4.1.7. Estructura final del algoritmo de cubicado

Una vez conocidos los pasos a seguir para aplicar el algoritmo de cubicado de volúmenes, en la Figura 3.55 se recoge a modo de resumen, el pseudocódigo que explica el proceso completo, al igual que se ha hecho con el mallado superficial.

```

repetir
    GENERAR CAJAS CONTENEDORAS
hasta FIN SUPERFICIES
CALCULAR REJILLA PUNTOS
repetir
    EVALUAR PUNTO INTERIOR
    si PUNTO INTERIOR && APROXIMACION INTERIOR
        EVALUAR PUNTOS ESQUINA
        si ESQUINA EXTERIOR
            PUNTO EXTERIOR
        fin condición
    fin condición
hasta FIN DE PUNTOS
repetir
    GENERAR ESQUINAS ELEMENTOS
hasta FIN PUNTOS INTERIORES

```

Figura 3.55: Pseudocódigo del algoritmo de cubicado.

3.4.2. Algoritmo de unión con la corteza

Para complementar la aproximación interior de la forma de los volúmenes mediante cubos, es posible generar una última capa adicional compuesta de hexaedros, cuya forma no siempre es homogénea, con la finalidad de optimizar la precisión de la representación de la malla resultante con la forma real del objeto.

La capa adicional se genera proyectando los puntos que componen las caras de los cubos más exteriores de la capa interior sobre la corteza del volumen original. Así, para cada cara de la capa interior más externa, se proyectan todos sus puntos y se obtiene un nuevo hexaedro, en el que la cara base es la placa cuadrada o rectangular perfecta (obtenida en la aproximación interior); su cara opuesta, definida por los puntos proyectados, se ajusta a la forma del volumen; y estas dos caras del hexaedro se unen mediante líneas rectas para formar las cuatro restantes.

La forma y tamaño de los elementos de la capa de unión no resulta tan homogénea como los de la aproximación interior, pero garantizan una buena calidad para representar el objeto y su número es, por lo general, bastante menor que el número de cubos interiores.

A continuación, se explican los tres pasos que componen este algoritmo: en primer lugar es necesario calcular las direcciones de proyección, una vez conocidas se proyectan los puntos sobre la corteza del volumen, y por último se generan los hexaedros de la capa de unión.

3.4.2.1. Cálculo de direcciones de proyección

Las direcciones de proyección son los parámetros más importantes de este algoritmo, ya que condicionan la bondad de los elementos sobre la corteza y si no se escogen adecuadamente, es necesario añadir etapas de evaluación de calidad y/o intersecciones. Seleccionando adecuadamente las direcciones de proyección, se puede asegurar que nunca se producirán intersecciones entre los elementos de la capa de unión. No obstante, es posible añadir algoritmos para mejorar la calidad y así conseguir elementos más homogéneos, pero entonces se volvería a hacer obligatorio, aunque solo de forma local, el comprobar intersecciones entre elementos modificados y sus vecinos.

El algoritmo implementado evita las intersecciones a priori, prescindiendo así de su detección y corrección, y no emplea etapas de evaluación de calidad.

El criterio para escoger la dirección de proyección es muy sencillo, ya que consiste en promediar los vectores normales que contribuyen a cada punto de las caras base (desde las que se proyecta) de la capa interior. Siguiendo con la nomenclatura empleada en los apartados anteriores, se denota como dx , dy , y dz , al tamaño de los cubos según las coordenadas x , y , y z . Si un determinado punto $P_i(x, y, z)$, tiene la contribución de N normales en la corteza de la aproximación interior según los vectores unitarios en x , y , y z , ($1 \leq N \leq 3$), denotadas como

N_{ij} , con $1 \leq j \leq N$, la dirección de proyección desde P_i , $D_i(x, y, z)$, se calcula ponderando las direcciones de propagación con las dimensiones deseadas según los ejes, siguiendo la expresión (3.27).

$$D_i(x, y, z) = \left(\frac{dx}{N} \sum_{j=1}^{N=3} N_{ij}(x), \frac{dy}{N} \sum_{j=1}^{N=3} N_{ij}(y), \frac{dz}{N} \sum_{j=1}^{N=3} N_{ij}(z) \right) \quad (3.27)$$

Además, conviene normalizar las direcciones de proyección una vez calculadas, para trabajar siempre con vectores unitarios, por lo que se denota la dirección final de proyección como U_{Di} , que se obtiene sencillamente mediante la relación (3.28).

$$U_{Di}(x, y, z) = \frac{D_i(x, y, z)}{\sqrt{D_i(x)^2 + D_i(y)^2 + D_i(z)^2}} \quad (3.28)$$

Retomando el ejemplo de la circunferencia en dos dimensiones, en la Figura 3.56 se han representado tres puntos $P1$, $P2$, y $P3$, situados en la corteza de la capa interior, junto con sus contribuciones según las normales en color rojo, denotadas con N_{ij} , siendo i el índice del punto sobre el que se encuentran, y j el índice de la normal para el i -ésimo punto. En color azul se representan las direcciones de proyección para cada punto, D_i (sin normalizar).

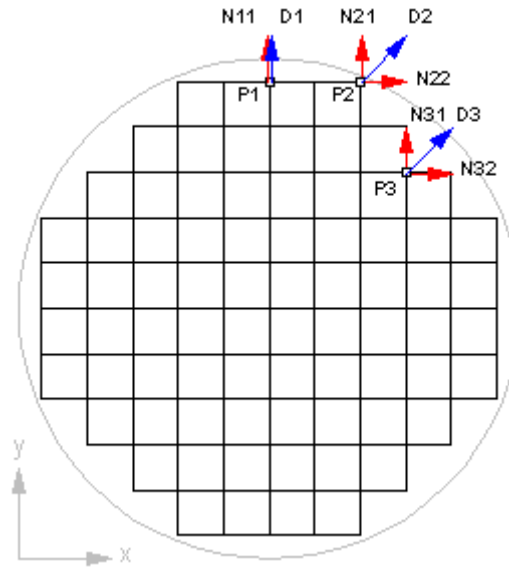


Figura 3.56: Cálculo de las direcciones de proyección.

A modo de ejemplo, si se desea calcular la normal de proyección para el punto $P2$ de la Figura 3.56, suponiendo $dx = 0,5$, y $dy = 0,5$, siguiendo las expresiones (3.27) y (3.28), se obtiene que:

- $N = 2 \rightarrow N21 = (0, 1); N22 = (1, 0)$
- $D2(x) = \frac{dx}{N} \sum_{j=1}^{N=2} N_{ij}(x) = \frac{0,5}{2} (0 + 1) = 0,25$

- $D2(y) = \frac{dy}{N} \sum_{j=1}^{N=2} N_{ij}(y) = \frac{0,5}{2} (1 + 0) = 0,25$
- $D2(x, y) = (0,25, 0,25)$
- $U_{D2}(y) = (0,707107, 0,707107)$

Estos cálculos se repiten para cada uno de los puntos que forman la capa más externa del mallado resultante en la aproximación interior, teniendo en cuenta que los puntos en común entre elementos adyacentes solo suman una vez la contribución de las normales. Es decir, en el ejemplo de la Figura 3.56, el punto P1 solamente tiene una contribución según el eje y , con $N = 1$ y $N11 = (0, 1)$. Finalmente, se representan en rojo las direcciones obtenidas para cada punto del ejemplo, en la Figura 3.57.

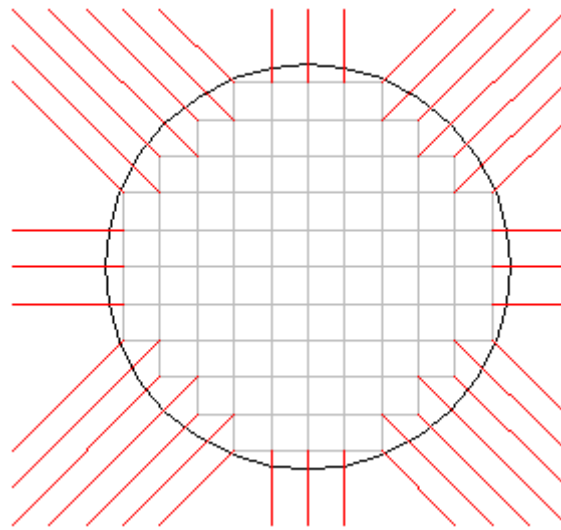


Figura 3.57: Direcciones de proyección calculadas en la circunferencia.

Una vez calculadas todas las direcciones unitarias, se buscan los puntos resultantes de proyectar sobre la corteza del volumen.

3.4.2.2. Puntos de corte con la corteza

El algoritmo para la búsqueda de los puntos de corte es el mismo que se emplea en la clasificación de puntos como interiores o exteriores: partiendo del punto base, y conociendo el vector unitario de proyección, se lanza un rayo infinito para encontrar el corte del mismo sobre la superficie de la corteza. En caso de que haya más de un punto de corte (superficies paralelas en la corteza desde el punto de vista del rayo), se escoge el que más cerca se encuentra del punto base.

Guardando una relación directa entre puntos base y puntos proyectados, es inmediata la generación de los elementos de la capa de unión.

3.4.2.3. Generación de elementos de unión

Una vez conocidos los puntos resultantes de la proyección y su conexión con la capa del mallado interior, se generan los elementos uniendo las facetas de la capa interior con sus puntos conectados en la corteza.

Para garantizar la precisión de la malla en este algoritmo de mallado, los hexaedros están compuestos por 27 puntos, de los cuales 8 son las esquinas, y 19 son puntos de control, análogamente a como ocurre en el caso superficial. El indexado de los 27 puntos que componen un hexaedro se muestra en la Figura 3.58. Se ha escogido este criterio para representar cada hexaedro con la misma estructura de 3 elementos superficiales. Con ello, cualquier hexaedro de la capa de unión tiene siempre su cara inferior (esquinas 1 a 4) contenida en la capa interior de mallado, su cara superior (esquinas 5 a 8) contenida en la corteza del volumen, y la faceta intermedia (esquinas 9 a 12) se obtiene como los puntos medios entre la faceta superior y la inferior.

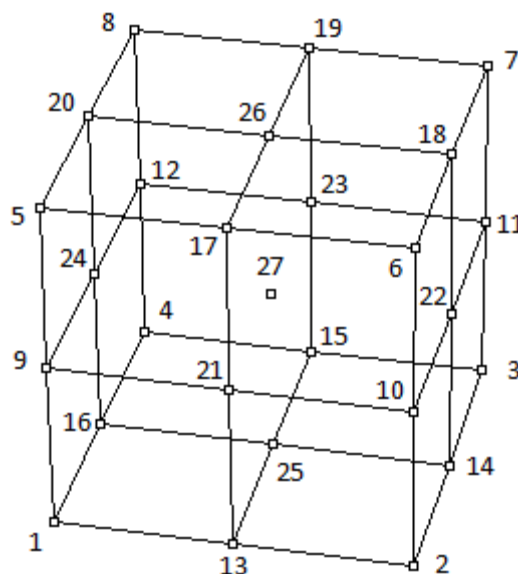


Figura 3.58: Indexado de los puntos de control en un hexaedro.

Analizando el criterio de indexado propuesto, se plantean las siguientes cuestiones:

- Se pueden eliminar los puntos 13, 14, 15, 16 y 25 de la cara superior, ya que se sabe que siempre será rectangular plana, por formar parte de la malla interior.
- También se puede prescindir de los puntos 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23 y 24, por ser siempre el promediado de 2 puntos esquina enfrentados de las caras inferior y superior.

- El punto 27 no es necesario, ya que simplemente representa el centro del hexaedro.

Sin embargo, resulta más genérico trabajar siempre con estructuras de datos homogéneas, optando entonces por el modelado de 27 puntos que se ha presentado. Así, siempre se tienen 6 caras compuestas de 9 puntos para cualquier hexaedro, y hace sencillo su procesado. El punto 27 se mantiene como información adicional para identificar el centro del hexaedro.

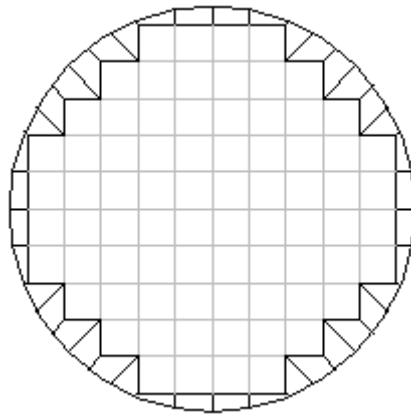


Figura 3.59: Malla volumétrica bidimensional final de la circunferencia.

En la Figura 3.59 se muestra el mallado final en dos dimensiones de la circunferencia que se ha empleado para explicar cada paso de esta sección. La malla de color gris se corresponde con la aproximación volumétrica interior, y en color negro se tiene la capa resultante de unir la malla interior con la corteza del volumen.

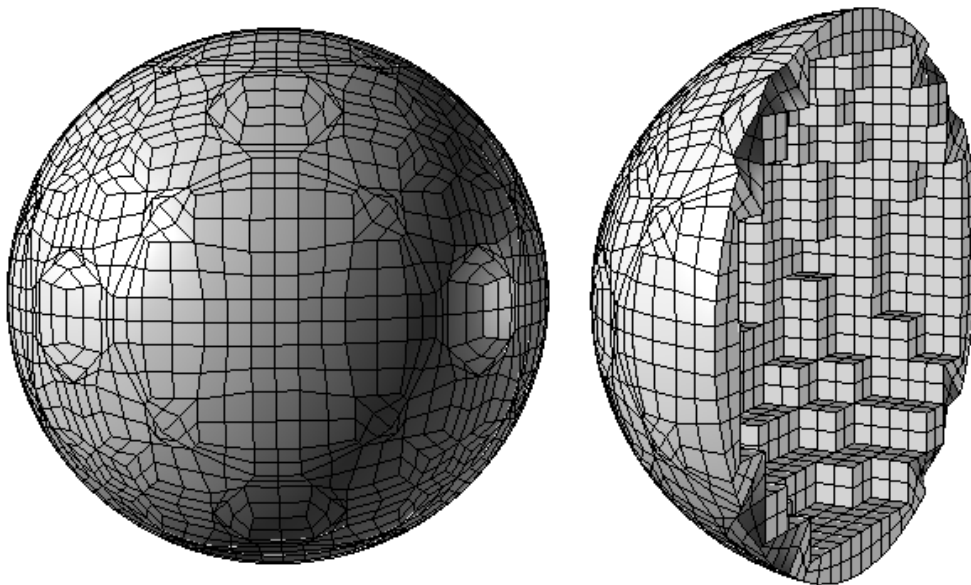


Figura 3.60: Mallado volumétrico final de una esfera.

Para concluir la sección, en la Figura 3.60 se muestra la capa de unión volumétrica de mitad de la esfera completa mallada anteriormente con las aproximaciones de forma del volumen general e interior. En la izquierda, se representa el aspecto exterior de los hexaedros, observando así la diversidad de formas y tamaños para las caras de los mismos que se encuentran en la corteza del volumen. En la perspectiva de la derecha, es posible visualizar algunos hexaedros por su parte interior, plana, y otros por su parte exterior, adaptada a las características del volumen.

3.5. REFERENCIAS

- [1] E. García García, «Contribución al análisis de problemas electromagnéticos mediante el Método de los Momentos con bajo coste computacional», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares., 2005.
- [2] I. González, E. García, F. S. d. Adana y M. F. Cátedra, «Monurbs: A Parallelized Fast Multipole Multilevel Code For Analysing Complex Bodies Modelled By NURBS Surfaces», *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 23, nº 2, pp. 134-142, 2008.
- [3] G. Farin, «Curved and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A practical Guide.», Orlando: Academic Press, 1996.
- [4] T. D. Blacker and M. B. Stephenson, "Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, no. 4, pp. 811-847, 1991.
- [5] R. J. Cass, S. E. Benzley, R. J. Meyers y T. D. Blacker, «Generalized 3D Paving: An automated quadrilateral surface mesh generation algorithm», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, nº 9, pp. 1475-1489, 1996.
- [6] M. R. Hestenes y E. Stiefel, «Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems», *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, nº 6, pp. 409-436, 1952.
- [7] D. R. White and P. Kinney, "Redesign of the Paving Algorithm: Robutness Enhancements through Element by Element Meshing", *Proceedings of the 6th Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, 1997.
- [8] P. Kinney, «CleanUp: Improving Quadrilateral Finite Element Meshes», *Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable*, Park City, Utah, U.S.A., 1997.
- [9] S. A. Canann, S. N. Muthukrishnan and R. K. Phillips, "Topological Improvement Procedures for Quadrilateral Finite Element Meshes", *Engineering with Computers*, vol. 14, no. 2, pp. 168-177, 1998.
- [10] NewFasant, «NewFasant», [En línea]. Disponible: <http://www.fasant.com/>. [Último acceso: Diciembre 2012].
- [11] A. Tayebi, «Contribución al Desarrollo de una Interfaz Gráfica de Usuario para el Diseño, Optimización y Análisis de Antenas mediante el Método de los Momentos», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares, 2011.
- [12] A. Cardama, L. Jofre, J. M. Rius, J. Romeu, S. Blanch y M. Ferrando, «Antenas», Barcelona, España: Edicions UPC, 2002.
- [13] L. L. Plata, «Desarrollo de Técnicas de Aceleración de Trazados de Rayos para la Reducción del Coste Computacional Asociado al Análisis de la Sección Recta Radar Utilizando Óptica Física», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universiad de Alcalá de Henares, 2006.

- [14] M. Domingo, R. P. Torres y M. F. Cátedra, «Calculation of the RCS from Interaction of Edges and Facets», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-42, nº 6, pp. 885-888, 1994.
- [15] A. Díaz Morcillo, «Métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados mediante el método de los elementos finitos», Valencia: Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [16] L. A. Freitag y C. Ollivier-Gooch, «A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques», *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, pp. 87-106, 1996.
- [17] M. L. Staten, S. J. Owen y T. D. Blacker, «Unconstrained Paving & Plastering: A New Idea for Hexahedral Mesh Generation», *Proceedings of the 14th. International Meshing Roundtable*, San Diego, California, USA, 2005.
- [18] R. Schneiders, «A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes», *Engineering with Computers*, vol. 12, nº 3-4, pp. 168-177, 1996.
- [19] R. Schneiders, R. Schindler y F. Weiler, «Octree-based generation of hexahedral element meshes», *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 1996.
- [20] M. A. Yerry y M. S. Shephard, «Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1965-1990, 1984.
- [21] Y. Ito, A. M. Shih y B. K. Soni, «Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, nº 13, pp. 1809-1833, 2009.

4. OPTIMIZACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE MALLADO

4.1. INTRODUCCIÓN

Tras desarrollar el algoritmo de mallado, es posible adaptar las características de la malla final a ciertos requisitos para trabajar con ella, así como implementar técnicas adicionales que sirvan para optimizar los tiempos de mallado y requisitos de memoria.

En este capítulo, se recopilan las principales técnicas y optimizaciones añadidas a la generación de mallas que se han implementado. Por una parte, se presentan las técnicas de pre-procesado, en las que se evalúa la geometría de entrada y se procesa para que el mallado sea lo más eficiente posible. Por otra parte, las técnicas de post-procesado estudian u optimizan la calidad de la malla de salida.

Otro aspecto a tener en cuenta es el tiempo de mallado. A medida que el número de elementos a generar crece, el algoritmo se muestra considerablemente más lento. Se proponen varias técnicas con las que se ha conseguido minimizar los tiempos de mallado, siendo más potentes a medida que el número de elementos de salida se incrementa.

En el desarrollo de este capítulo, las explicaciones teóricas se apoyan de ejemplos, aunque en el capítulo de *Resultados* se muestran más casos prácticos.

4.2. ETAPAS DE PRE-PROCESADO

Previamente al mallado, es recomendable evaluar algunas características de la geometría de entrada, como por ejemplo, si está compuesta por superficies cerradas, o si hay continuidad entre las superficies que la componen.

Las superficies cerradas o que describen curvaturas importantes en comparación con el tamaño de elemento deseado para mallar, suponen una posible pérdida de precisión en la

mallado. Esto se debe a que las proyecciones realizadas en el proceso de mallado, para pasar de casos arbitrarios tridimensionales a planos bidimensionales, cometen un error demasiado grande. Para evitar este problema, se aplica un primer pre-procesado a la geometría de entrada, que consiste en la evaluación de las curvaturas de las superficies de entrada. Aquellas superficies demasiado curvadas se simplifican, dividiéndolas en lazos conectados entre sí que describen una curvatura aceptable. Por ejemplo, un toro modelado con una única superficie de un solo lazo, como el representado en la Figura 4.1a, puede resultar muy complejo de mallar, y para el caso de lados de elementos demasiado grandes, inviable. Para solucionar el problema simplificando la geometría, en la Figura 4.1b se ha descompuesto en 8 lazos conectados, que se pueden mallar sin problemas con cualquier tamaño de elemento, ya que no describen curvaturas mayores de 180° .

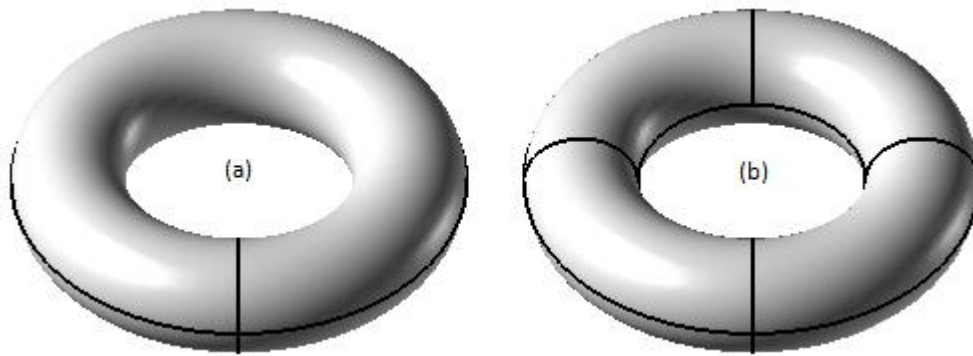


Figura 4.1: Toro modelado con una superficie cerrada (a), y simplificado por lazos (b).

El correcto modelado de la continuidad es el requisito más importante, ya que por lo general, las superficies que componen la geometría son independientes unas de otras, y aunque se encuentran en aparente contacto, su detección no es una tarea inmediata. En esta sección, se explica el algoritmo implementado para llevar a cabo la detección de topologías entre superficies en contacto, independientemente de cómo hayan sido modeladas. Además, este método se utiliza en dos técnicas adicionales desarrolladas:

- La primera gran utilidad de la detección de topologías, se emplea para forzar la continuidad eléctrica entre antenas modeladas mediante superficies planas y el resto de las estructuras sobre las que se colocan.
- Adicionalmente a la detección de topologías, se propone un método particular para el mallado de circuitos impresos compuestos por capas planas. Su finalidad es simplificar la forma de los circuitos y mallarlos disminuyendo el tamaño de los elementos en los contornos del circuito, para así modelar correctamente el efecto de la corriente en los

bordes de los circuitos microstrip, por ejemplo. También se puede aplicar a casos grandes y arbitrarios, como las superficies que forman un reflector, obteniendo en los bordes del mismo un mallado más denso que en el interior.

Las técnicas expuestas son útiles cuando la continuidad de la malla es un requisito importante, como por ejemplo, cuando se aplica el Método de los Momentos (MoM) [1], [2], [3].

4.2.1. Detección de topologías

Como ya se ha mencionado en la introducción de la sección, es necesario detectar la continuidad entre superficies en contacto, independientemente de su modelado, ya que las superficies con bordes comunes deben tener los mismos nodos frontera para asegurar la continuidad eléctrica en el mallado.

El modelado más correcto es aquel en el que las superficies se encuentran en contacto entre uno o más de sus contornos, de inicio a fin. Así, cualquier punto de la curva de contorno de una superficie siempre está contenido en la curva de contorno de la otra superficie, y viceversa. No obstante, este es el modo de modelado más complejo, ya que se generan más superficies de las que realmente serían necesarias para obtener la misma forma con otros modelados, y en ocasiones, es complicado conseguir este requisito mediante superficies sencillas.

Así pues, es necesario tener en cuenta que el requisito anterior no se cumplirá como norma general, y desarrollar un algoritmo de detección que permita obtener un modelo continuo a partir de una geometría cualquiera, hecha con superficies en contacto parcial.

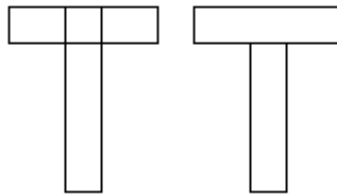


Figura 4.2: Modelado de una 'T'.

Para distinguir la diferencia entre las dos formas de modelado geométrico, se representa una geometría plana con forma de 'T' en la Figura 4.2, distinguiendo en la parte izquierda el modelo continuo complejo, compuesto por 4 superficies con contacto total entre sus contornos compartidos, y a la derecha su modelo sencillo de 2 superficies en el que solo

hay continuidad parcial entre las curvas de contorno en contacto. Estos dos modelos tienen un mallado diferente, tal y como se muestra en la Figura 4.3: en la parte izquierda aparece el mallado del modelo continuo, en el que todos los elementos se encuentran en perfecto contacto entre sí; la malla del centro se corresponde con la del modelo discontinuo, observando que la discontinuidad entre las superficies queda reflejada en la malla; y por último, en la derecha se repite el mallado del modelo discontinuo, con la particularidad de que se ha detectado el contacto entre las superficies y se ha conseguido un mallado completamente continuo.

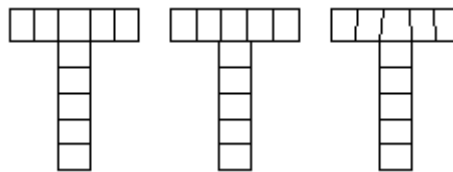


Figura 4.3: Mallados de una 'T'.

El proceso de detección de topologías se resume principalmente en dos pasos: en el primero, se consideran los contactos parciales entre curvas de contorno para redefinirlas como una colección de curvas de contorno en las que si que hay una continuidad total; y en el segundo paso se establecen las relaciones de continuidad de las curvas resultantes del primer preprocesado. Ambas etapas se basan en la búsqueda de puntos sobre las curvas en estudio, tras un primer filtrado a nivel de cajas contenedoras para acelerar el cálculo de la topología.

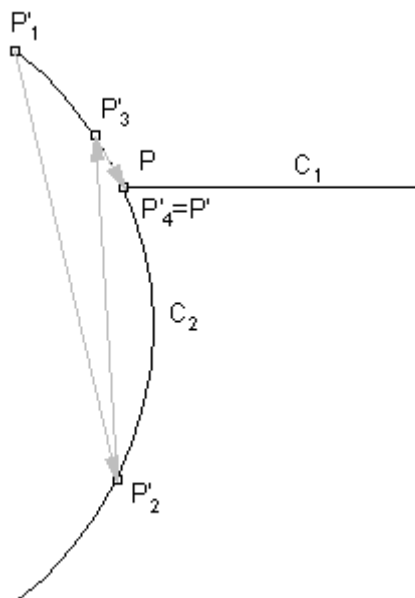


Figura 4.4: Búsqueda de puntos entre curvas de contorno.

A continuación, se explica la búsqueda de puntos entre curvas de contorno, válido para curvas que no pertenecen a la misma superficie. Dada una curva, C_1 , se pretende comprobar si el punto P , sobre uno de sus extremos, se encuentra contenido en otra curva, C_2 . Para ello, utilizando el algoritmo del gradiente conjugado [4], [5], se busca el punto contenido en la curva C_2 , P' , que minimiza la distancia con respecto a P en un proceso iterativo. Finalizada la búsqueda, se comprueba si los puntos P y P' son coincidentes, en cuyo caso las curvas C_1 y C_2 están en contacto al menos por un punto. Identificando todos los tramos de una curva que se encuentran sobre otra, se establecen las relaciones de continuidad. En el ejemplo de la Figura 4.4, se representa la búsqueda iterativa del extremo P de la curva C_1 sobre la curva C_2 , para lo que son necesarias cuatro iteraciones: P'_1 , P'_2 , P'_3 , y $P'_4=P'$, que sirven para detectar que hay contacto entre las dos curvas por los puntos coincidentes $P'=P$.

Análogamente a como se hace en la búsqueda de cortes de rayos con superficies, en la clasificación de puntos del mallado volumétrico, el uso de cajas contenedoras sirve como criterio de preselección a la hora de buscar puntos comunes entre unas curvas de contorno y otras, descartando todas aquellas candidatas que están demasiado alejadas de la curva en estudio.

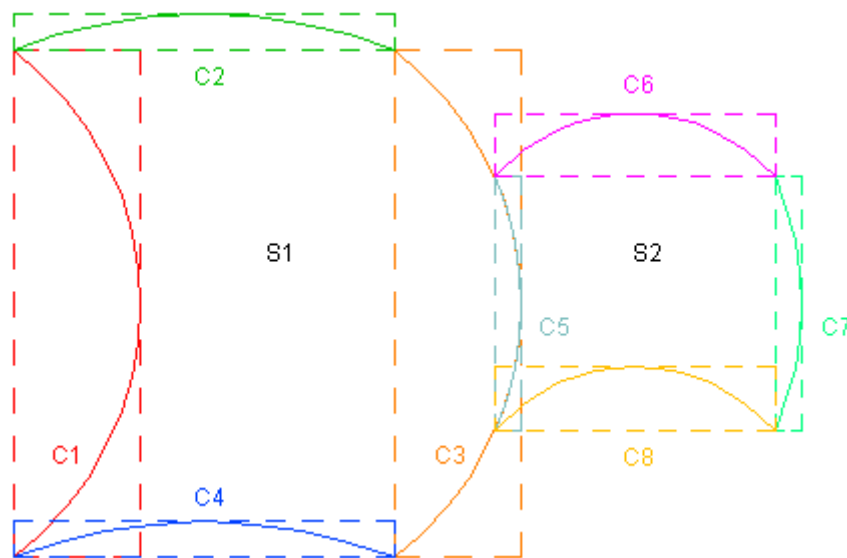


Figura 4.5: Cajas contenedoras de las curvas de contorno de dos superficies.

Considerar el ejemplo de las dos superficies curvas $S1$ y $S2$ de la Figura 4.5, formadas por las curvas de contorno $C1$, $C2$, $C3$, y $C4$; y $C5$, $C6$, $C7$, y $C8$, respectivamente, representadas con curvas continuas de diferentes colores para diferenciarlas, junto con sus cajas contenedoras asociadas en líneas discontinuas. Si no se empleara el criterio de cajas contenedoras, cada curva de una superficie buscaría puntos comunes con todas las curvas de

la otra superficie, por ejemplo: *C1* con *C5*, *C6*, *C7* y *C8*, realizando un total de 32 comprobaciones. Al preseleccionar solamente aquellas curvas de contorno en las que se solapen sus cajas contenedoras, las curvas *C1*, *C2*, *C4* y *C7* no buscan cortes con ninguna otra curva; la curva *C3* evalúa a las curvas *C5*, *C6* y *C8*; y tanto *C5* como *C6* y *C8* examinan a *C3*, reduciendo el número de comprobaciones realizadas a 6.

4.2.1.1. Remodelado de continuidad

Todas las curvas de contorno se estudian de forma independiente, comparándose con el resto de curvas (de otras superficies) que están próximas a ellas, preseleccionadas por el criterio de las cajas contenedoras.

Al procesar cada curva, se almacenan todas las posibles intersecciones con las curvas de las demás superficies, siempre y cuando haya intersecciones en varios puntos, por ejemplo, si el inicio de una curva 1 intersecciona sobre otra curva 2, solo se tiene en cuenta si hay más puntos de la curva 1 contenidos en la curva 2. Posteriormente, se divide la curva en tantos tramos como sea necesario debido a las intersecciones encontradas.

Al dividir una curva de contorno, las resultantes mantienen las mismas características de la curva original, con la salvedad de que se acota el inicio y el fin de la curva paramétrica, originalmente definido entre 0 y 1. De este modo se mantienen todos los detalles del modelo original.

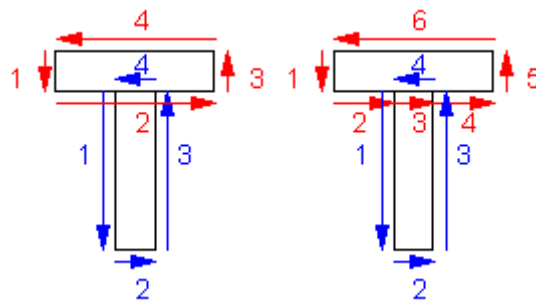


Figura 4.6: Remodelado de continuidad.

Para continuar con el ejemplo de la 'T' empleado anteriormente, en la Figura 4.6 se estudia el indexado de las curvas para el modelo no continuo, antes y después de hacer el remodelado de continuidad. Para ello, se representan en diferentes colores las curvas de contorno de cada superficie, numeradas de 1 a 4 en el modelo original de la parte izquierda de la figura. Observando esta numeración, la curva número 4 de la superficie numerada en azul está contenida dentro de la curva 2 de la superficie en rojo: esto provoca dos intersecciones

sobre la curva roja número 2. Estudiando ahora únicamente la curva 2 roja, se han encontrado dos intersecciones, y además ninguna de ellas se encuentra en su inicio o fin, por lo que la curva queda dividida en tres tramos. En la parte derecha de la figura se muestra el indexado de las curvas al evaluar las candidatas a tener topología, donde se observa que la curva 2 roja se ha dividido en tres curvas consecutivas (2 a 4), y todas sus curvas posteriores han sido reindexadas.

Una vez remodeladas todas las curvas que inicialmente tenían continuidad parcial, se puede detectar la continuidad de forma sencilla, ya que todas las curvas en contacto coinciden de inicio a fin.

4.2.1.2. Detección final

Esta etapa es más rápida y sencilla que la anterior, al no tener que evaluar contactos parciales entre curvas. Para almacenar la información final de la topología en la geometría, es suficiente con evaluar unos pocos puntos de las curvas candidatas, como por ejemplo, sus puntos inicial, central y final: si hay coincidencia entre ellos, se considera que las superficies están en contacto por esas curvas de contorno.

Cada curva almacena información de las curvas con las que se toca, las superficies a las que pertenecen y el sentido de las mismas, ya que se pueden dar dos casos: las superficies en contacto cuyas normales son coherentes (igualmente orientadas), tienen sentidos contrarios en sus curvas en contacto; mientras que si sus normales son inversas, el sentido de sus curvas compartidas es el mismo.

En el ejemplo de derecha de la Figura 4.6, una vez remodeladas las curvas, se observa que la curva número 3 de la superficie de color rojo se encuentra en contacto con la curva número 4 de la superficie de color azul, y además sus sentidos son opuestos, por lo que se deduce que las normales de las dos superficies son iguales en la región en la que se tocan.

Finalmente, hay que destacar que debe haber reciprocidad entre todas las curvas que hay en contacto, es decir, el contacto se duplica para cada par de curvas conectadas.

4.2.2. Emplazamiento de antenas en estructuras

Basándose en una variación de la detección de topologías, se ha implementado una opción para forzar la continuidad eléctrica entre superficies que cumplan una serie de

requisitos. Anteriormente, la continuidad eléctrica se permitía sólo en las curvas de contorno de las superficies, y con esta nueva opción se puede fijar en cualquier parte de la geometría.

Para ello, partiendo de una superficie denominada candidata, que debe tener al menos una curva de contorno recta, se trata de buscar otra superficie, llamada víctima, sobre la que haya contacto total con uno de los contornos rectos de la superficie candidata. Cuando el contacto es entre curvas de contorno, la detección se hace automáticamente en las topologías, pero cuando un contorno recto de la superficie candidata cae dentro de la región a mallar de la superficie víctima, es necesario recurrir a esta técnica.

La diferencia con respecto a la detección de topologías se puede explicar gráficamente mediante el ejemplo de la Figura 4.7. En la parte izquierda, se representan dos superficies planas modeladas para que no haya continuidad entre ellas. En la parte derecha, se muestra un mallado de ejemplo con un tamaño de elementos más grande que las dimensiones de las superficies, donde se observa que sí hay continuidad eléctrica. De acuerdo con la notación explicada, la tira vertical sería la superficie candidata y la placa cuadrada la víctima.

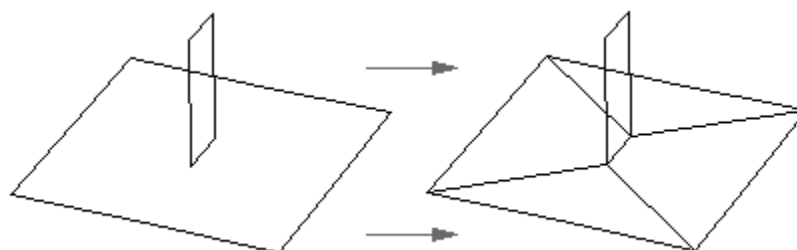


Figura 4.7. Detección forzada de continuidad en tramos rectos.

Para forzar la continuidad, se realiza una búsqueda acelerada de puntos hasta encontrar cual de los lados rectos de la superficie candidata tiene sus dos extremos contenidos sobre la superficie víctima. Una vez identificados los puntos de la superficie candidata contenidos sobre la víctima, se genera un lazo (llamado de alimentación) en la superficie víctima, compuesto por dos tramos rectos coincidentes y de sentido contrario, resultantes de unir los dos puntos (ida y vuelta). Antes de mallar la superficie víctima, se genera en una de las curvas del nuevo lazo de alimentación una fila de tantos elementos como sea necesario hasta que este pase de tener líneas solapadas a tener la forma de un agujero interior, repleto por los elementos generados. Una vez hecho esto, el proceso de mallado es el típico visto hasta ahora.

Si se desea adaptar esta técnica a superficies candidatas conectadas a las víctimas por curvas de contorno no rectas, en lugar de definir un lazo de dos tramos rectos sobre la superficie víctima, hay que hacerlo con un lazo cuya forma venga definida por la curva

candidata, teniendo un solo tramo si la curva es cerrada, o dos tramos coincidentes y de sentido contrario si la curva es no cerrada. El resto del proceso es idéntico. No obstante, todos los casos analizados hasta ahora han proporcionado resultados satisfactorios utilizando superficies planas para forzar la alimentación. Además, utilizando lazos de alimentación curvos, la generación de la primera fila de elementos para convertirlos en agujeros puede resultar más compleja.

4.2.3. Mallado de circuitos impresos

Un caso particular en el que resulta de especial utilidad la detección de topologías, es cuando se desea analizar circuitos impresos (planares). Este tipo de geometrías puede tener formas muy diversas, y con las herramientas de Diseño Geométrico Asistido por Computador (*Computer Aided Geometric Design*, CAGD) actualmente disponibles, en la mayoría de casos se modela la forma completa del circuito mediante una serie de formas canónicas en contacto.

No obstante, a la hora de fabricar los circuitos, lo más común es encontrarlos como una única pista, cuya forma será la misma que la modelada con las herramientas de CAGD pero sin estar compuesta por formas simples conectadas.

Los circuitos impresos se caracterizan por tener capas conductoras separadas del plano de masa por medio de dieléctricos, lo que hace que aparezca el llamado efecto borde, en el que el campo eléctrico aumenta en los contornos del circuito. [6]

Para modelar el efecto borde en este tipo de circuitos, se recomienda convertir los modelos circuitales obtenidos de las herramientas de CAGD con formas primitivas a pistas únicas y uniformes, y aplicar un mallado de menor tamaño de elementos en sus contornos. Siguiendo este procedimiento, se evitan los falsos bordes que pueden aparecer al modelar el efecto borde directamente sobre los modelos CAGD originales, como se verá más adelante (se muestra un ejemplo en el reflector de la Figura 4.11).

4.2.3.1. Detección de circuitos

La conversión de modelos CAGD de circuitos a pistas independientes se basa principalmente, en la detección de topologías explicada en la sección 4.2.1 y en el uso de superficies recortadas y curvas recortadoras estudiadas en el *Capítulo 2*. Una vez calculadas las topologías entre las superficies que componen el modelo, es posible redefinir la geometría como una colección de pistas aisladas entre si.

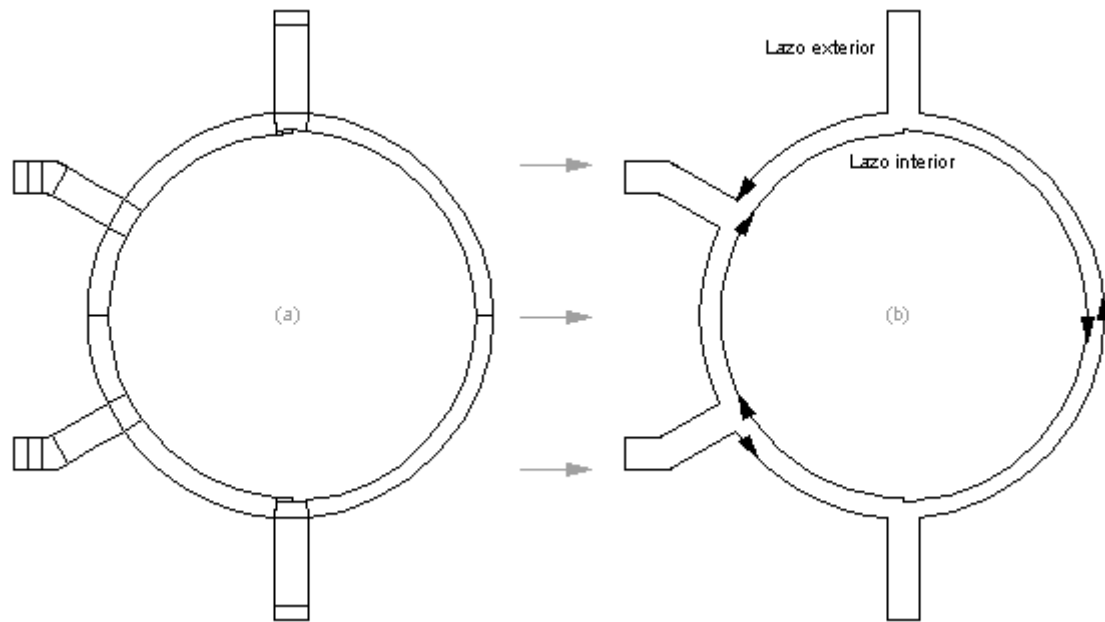


Figura 4.8: Ejemplo de detección de un circuito impreso.

Tomando como ejemplo el circuito representado en la Figura 4.8, el procedimiento a seguir para realizar la detección y conversión de los circuitos se resume en los siguientes pasos:

- Detección de topologías. Después de calcular las topologías entre todas las superficies que componen la geometría, se calcula el número de objetos independientes entre sí (que no están en contacto) que hay. En la Figura 4.8a, hay un total de 24 superficies que forman un único objeto, ya que están en contacto unas con otras.
- Creación de los lazos que forman el circuito. De cada objeto independiente encontrado, siempre hay al menos un lazo exterior que delimita las pistas, aunque habrá varios si el circuito tiene agujeros. Para formar los lazos, se conectan ordenadamente todas las curvas de contorno de la geometría original que no tienen topología con ninguna otra curva (llamadas curvas libres), hasta formar un polígono cerrado. Se repite este proceso hasta crear tantos “polígonos” cerrados como sea necesario para agrupar todas las curvas libres, siendo cada “polígono” lo que denominamos como lazo. En el ejemplo de la Figura 4.8b, se ha detectado que el objeto está formado por dos lazos, pero en este paso todavía no están clasificados (como externos o internos), por lo que no se sabe cuáles serán sus sentidos de mallado. Si los vectores normales de las superficies del circuito no son coherentes, habrá lazos con curvas de sentidos opuestos.

- Asignación del sentido de los lazos del circuito. Los lazos están formados por una colección de curvas en las que puede que sus sentidos no coincidan, por lo que en primer lugar hay que asignar un sentido en concreto para que todas las curvas del mismo lazo sean coherentes. Una vez asignado un sentido cualquiera a los lazos, es necesario evaluar si es el correcto o no, siendo el criterio principal que los lazos que están contenidos dentro de otros deben tener su sentido opuesto al lazo inmediatamente exterior que los contiene. Siguiendo esta norma, basta con definir el sentido de los lazos más exteriores para que se mallen siempre hacia dentro, e ir alternando los sentidos de sus lazos interiores. En el ejemplo de la Figura 4.8b, al lazo exterior se le asigna el sentido de mallado antihorario, y al interior sentido horario.
- Creación del circuito sobre una única superficie. El último paso es almacenar el circuito como una única superficie plana, que contenga todas las características del original pero que este formada por pistas independientes. Conociendo todos los lazos y sus sentidos, basta con definir una superficie (una placa plana) que los contenga en su interior y recortarla por medio de las curvas recortadoras que forman los lazos.

Hay que aclarar que este método de detección solamente es válido para aplicarlo sobre geometrías en las que todos sus componentes están contenidos sobre un mismo plano. Para circuitos compuestos por diferentes capas, basta con aplicar el algoritmo por separado a cada capa.

Una vez identificados todos los lazos y definidos correctamente sus sentidos, es posible usar las pistas detectadas como una nueva geometría de entrada para mallar, compuesta por una superficie recortada, disminuyendo el tamaño de los elementos en sus contornos con el método que se explica a continuación.

4.2.3.2. Modelado de bordes

A la hora de mallar geometrías en las que se quiere reducir el tamaño de los elementos en los contornos de las mismas, se modifica únicamente su dimensión perpendicular a los contornos de la geometría.

Dado un tamaño deseado de lado de elemento, T , para modelar el efecto borde en una geometría, se pasa de tener elementos cuadrados de dimensiones $T \times T$ en toda la malla, a

tener elementos rectangulares de dimensiones $T_B \times T$ en la primera fila de los contornos del circuito, y cuadrados de $T \times T$ en el resto de la geometría. Analizando el ejemplo de una tira rectangular mallada con efecto borde de la Figura 4.9, se observa que la dimensión T_B no se aplica sobre el lado de los elementos situados en las esquinas, sino que se mide desde la sección transversal a la curva de contorno, consiguiendo así un efecto borde constante en toda la geometría.

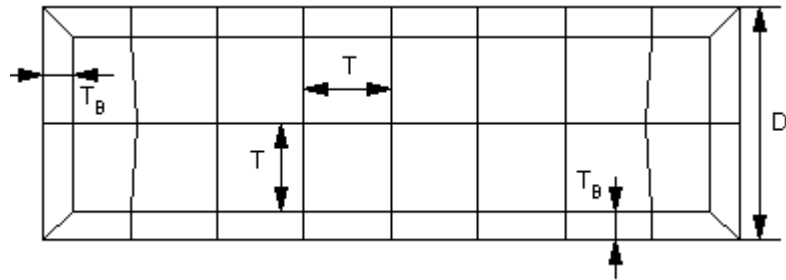


Figura 4.9: Dimensiones de elementos en una tira mallada con efecto borde.

La distancia de los lados de los elementos que se encuentran en los contornos de los circuitos a su lado enfrentado, T_B , se calcula según la relación (4.1).

$$T_B = \begin{cases} \frac{T}{b} & \text{si } T < D \\ \frac{D}{b} & \text{si } T \geq D \end{cases} \quad (4.1)$$

Siendo D la mínima dimensión del circuito, que garantiza que se modela el efecto borde sin producirse intersecciones entre los elementos de los contornos; y b el *factor de borde*, que indica la fracción del tamaño de referencia deseada para la dimensión de los elementos transversal a los contornos, y siempre es mayor o igual que 3.

Una vez calculada de forma automática D y estimado por tanto T_B , para mallar se aplica el algoritmo de mallado [7], [8] explicado en el *Capítulo 3*, con una serie de variantes:

- Todos los nodos frontera se tratan como *laterales* o *Tipo 3*, de tal manera que los nuevos nodos proyectados desde estos siempre caen en la bisectriz de su ángulo, y además están separados una distancia T_B de los contornos de la geometría.
- Si los elementos generados en los contornos de la geometría no producen ninguna intersección y su calidad es buena, los nodos no frontera que los forman deben permanecer invariables durante el resto del mallado. Es decir, ninguna

operación de suavizado, cosido, ajuste de fila o mejora de calidad puede modificar estos elementos.

- El resto del mallado en el interior de la geometría tiene el mismo funcionamiento que cuando no se aplica efecto de bordes.

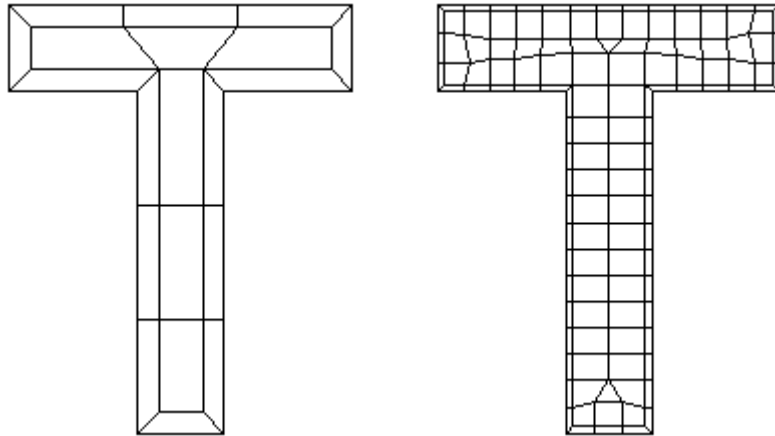


Figura 4.10: Modelado de efecto borde en una 'T'.

La 'T' de la Figura 4.2 se ha mallado con dos tamaños diferentes de borde deseado T , y con un factor $b=4$, representando las mallas en la Figura 4.10. En la parte izquierda, se tiene la particularidad de que $T > D$, por lo que la distancia de los bordes a la siguiente capa de elementos es D/b . Por el contrario, en la malla de la derecha se tiene que $T < D$, de modo que la distancia de los bordes a los elementos es T/b . En ambos casos se observa que todos los elementos que tienen nodos frontera que pertenecen al mismo contorno de la geometría son rectángulos perfectos, mientras que los que contienen algún nodo frontera situado en alguna esquina de la geometría tienden a deformarse, adquiriendo forma de trapecios.

Este efecto se puede habilitar para mallar cualquier tipo de geometría. Sin embargo, se recomienda utilizarla solamente en circuitos planos detectados con el procedimiento explicado, para evitar que se modele dos veces el efecto entre las curvas de contorno de las superficies en contacto. Cuando esto ocurre, se considera por duplicado un efecto borde en una región en la que no se debería tener en cuenta dicho efecto, ya que realmente las dos superficies implicadas tienen topología y por tanto, no se pueden considerar como "bordes libres". Por ejemplo, si se desea mallar un reflector modelado con 4 sectores idénticos en contacto, además de aparecer el efecto borde en los contornos del reflector, se genera por duplicado en las uniones de los sectores que lo forman, tal y como se muestra en la Figura 4.11. Si se restringe el efecto borde únicamente a los nodos frontera contenidos en contornos libres, se consigue modelar correctamente dicho efecto, pero por el contrario, la continuidad

entre las superficies en contacto hace que no sea posible definir una transición de elementos de buena calidad entre los que tienen dimensiones $T_B \times T$ y los de dimensiones $T \times T$.

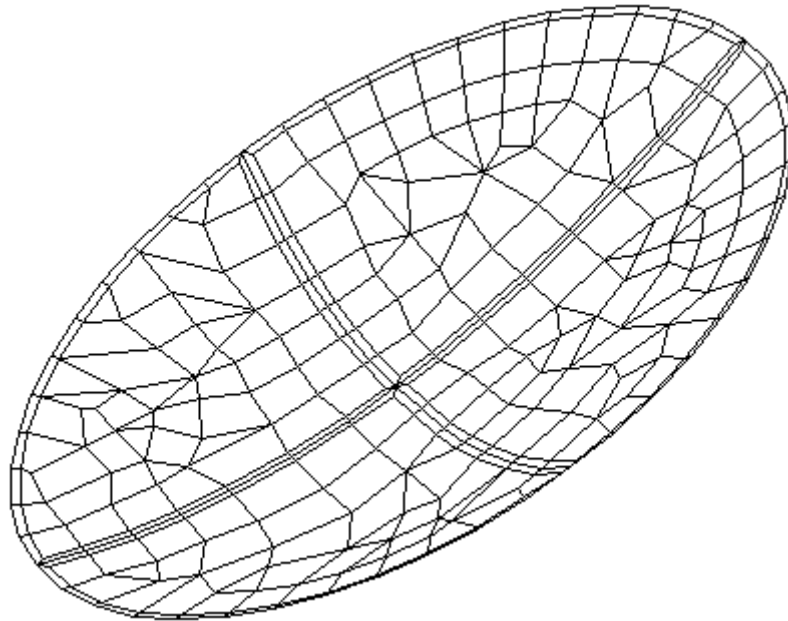


Figura 4.11: Malla de un reflector con efecto borde.

4.3. ETAPAS DE POST-PROCESADO

Ante la necesidad de comprobar o editar una serie de características de la malla en algunos casos, se crean una serie de etapas específicas para aplicar tras finalizar el proceso de mallado, de ahí que se clasifican como funciones de post-procesado. Algunas de estas etapas realizan modificaciones sobre la malla, y otras simplemente dan información de la misma para tener una idea general de su calidad, por ejemplo, resumiendo el número de elementos cuadrangulares o triangulares que la componen, y sus características. [9]

4.3.1. Cálculo de estadísticas

El cálculo de estadísticas es una opción adicional que permite obtener información de interés relativa a los elementos que componen la malla de salida. Resulta especialmente útil cuando las mallas están compuestas por demasiados elementos y es complicado evaluar su calidad visualmente.

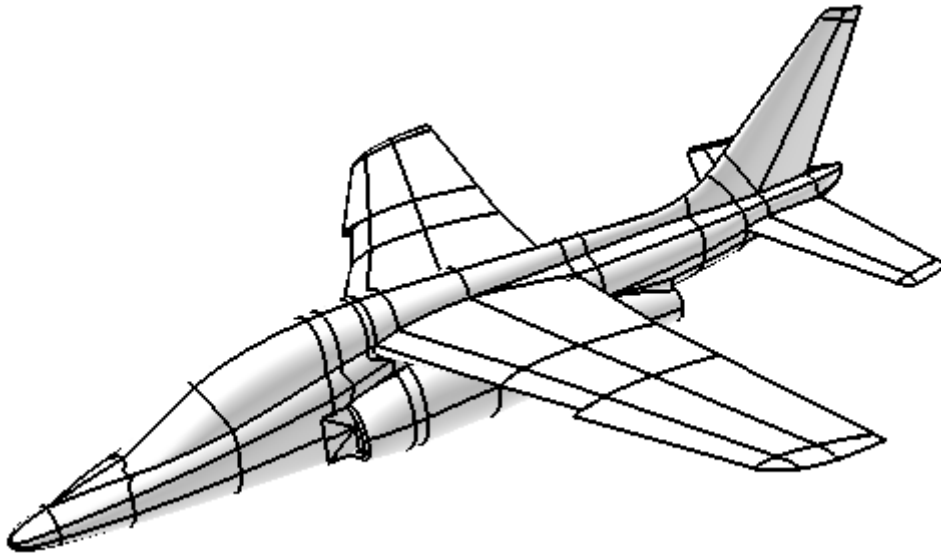


Figura 4.12: Modelo geométrico de un avión.

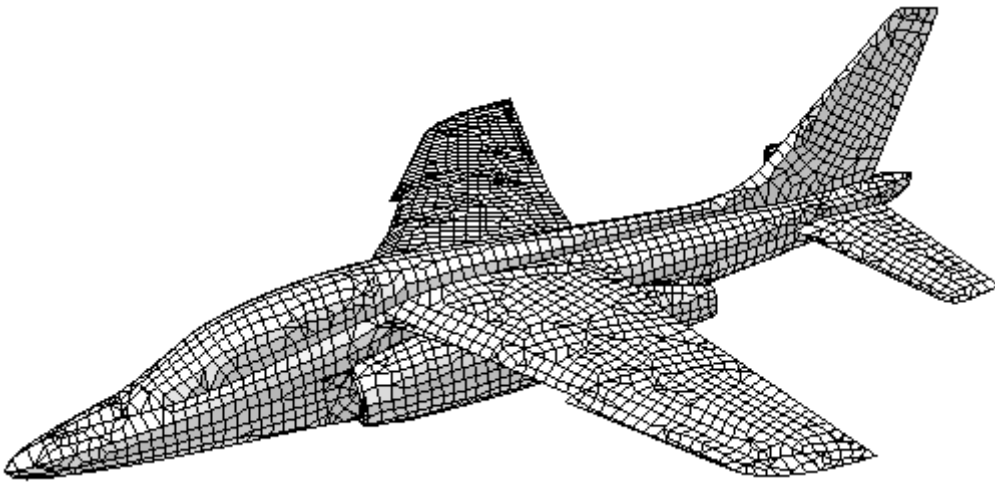


Figura 4.13: Malla de salida del avión en el primer nivel (1/2).

Por ejemplo, suponer que se desea mallar el avión representado en la Figura 4.12, formado por 358 superficies, con un área total de $96,86 \text{ m}^2$, y unas dimensiones de $9,12 \times 11,73 \times 3,53 \text{ m}$. (ancho x largo x alto). El lado deseado de los elementos cuadrados es de $3,3 \text{ cm}$. (área de $0,0011 \text{ m}^2$), por lo que se estima un total de unos 90.000 elementos. Al realizar el mallado empleando dos niveles¹, se obtienen como salidas del primer y segundo nivel las mallas representadas en la Figura 4.13 y en la Figura 4.14, respectivamente. El tiempo de mallado, empleando 6 procesadores, es de 2 minutos y 20 segundos. La primera malla tiene 6.150 elementos, y la segunda 120.000, que se aleja de la estimación inicial ya que las superficies iniciales no son cuadrados perfectos, y eso conlleva un desajuste en la predicción. La malla del primer nivel de la Figura 4.13 se puede analizar visualmente sin problemas, pero

¹ Los niveles de mallado consisten en la generación de una malla determinada en pasos intermedios en los que disminuye el tamaño de los elementos en cada paso y se usa la salida como geometría para el siguiente nivel a mallar. El mallado multinivel se explica con más detalle en la sección 4.4.1.2.

para hacerlo con la malla final de la Figura 4.14, resulta complicado inspeccionarla sin disponer de un zoom adecuado. En casos más grandes, el procesado de objetos con cantidades considerables de información suele ser computacionalmente muy costoso en las interfaces gráficas. El análisis estadístico de la malla en este tipo de problemas, nos permite evaluar la calidad de la misma. En el caso del avión, el análisis de la malla final se ha realizado en 5 segundos, y sus estadísticas se presentan acompañando las explicaciones de esta sección.

Es posible aplicar esta etapa a una malla ya existente, seleccionando un fichero de malla, o bien incluirla en la parte final del mallado. Además, los cálculos necesarios en esta etapa se realizan en paralelo, ya que son prácticamente independientes, y las operaciones de sincronización entre procesadores son mínimas.

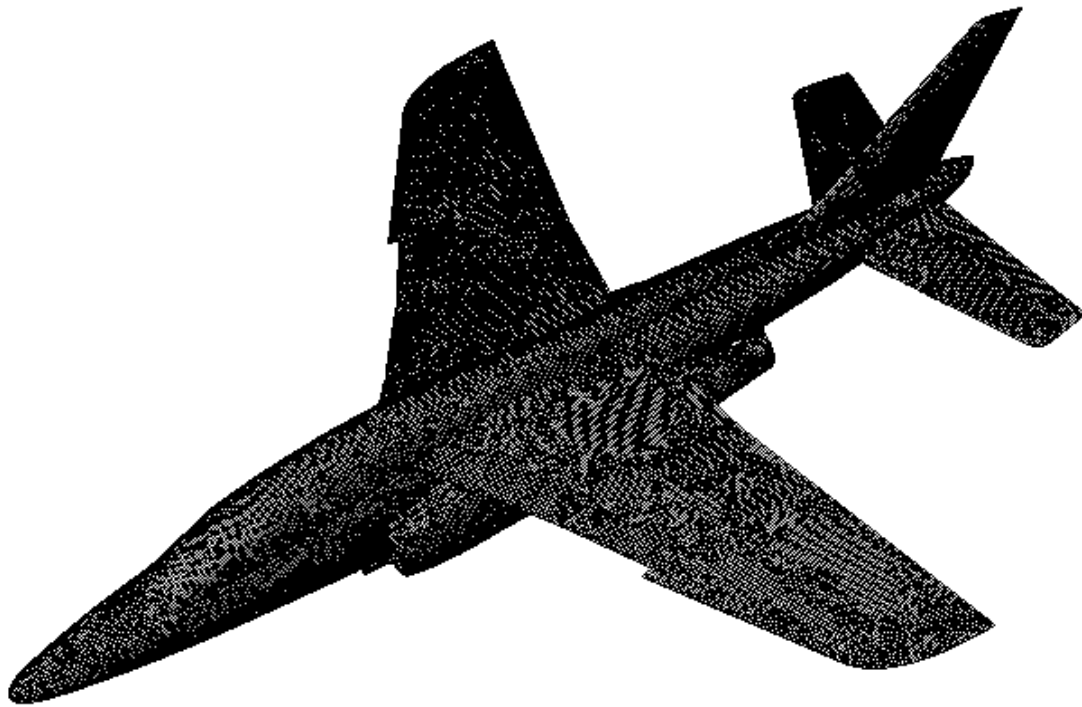


Figura 4.14: Malla de salida del avión en el segundo nivel (2/2).

Las estadísticas generadas a partir de una malla son las siguientes:

- Longitudes de los bordes de los elementos, distinguiendo a la hora de generar la información de salida si se trata de elementos cuadrangulares o triangulares (para el ejemplo del avión: Figura 4.15 y Figura 4.16, respectivamente). Las longitudes calculadas son una aproximación, ya que se estiman como la suma de los dos tramos rectos que componen un borde completo: siguiendo la numeración explicada en el *Capítulo 3* para los nodos dentro del elemento, la longitud del borde que va de los nodos 1 a 2 se calcula como la suma de las distancias de los

nodos 1 a 5 más la distancia de los nodos 5 a 2. Esta aproximación es suficientemente precisa, ya que los datos únicamente tienen un carácter informativo, y al aplicarse sobre mallas de gran densidad, el error solo se comete en los bordes curvados, minimizándose a medida que disminuye el tamaño de los elementos.

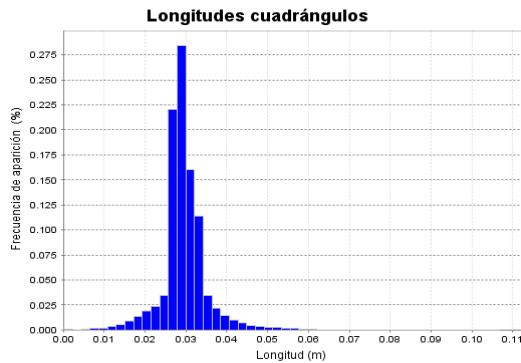


Figura 4.15: Longitudes de lado de los cuadrángulos en el avión mallado con multinivel.

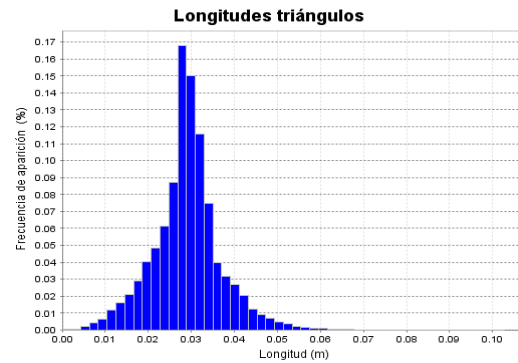


Figura 4.16: Longitudes de lado de los triángulos en el avión mallado con multinivel.

- Ángulos internos en las esquinas de los elementos, distinguiendo también si los elementos son cuadrangulares o triangulares (para el ejemplo del avión: Figura 4.17 y Figura 4.18, respectivamente). Se sabe que un criterio básico en la calidad de las mallas es que los elementos generados tengan ángulos interiores menores a 180° . Aunque el ángulo óptimo es 90° , en ocasiones se generan elementos con ángulos mayores o menores, cuando no es posible completar ciertas superficies con elementos de mejor calidad. Al tener siempre ángulos inferiores a 180° , un método sencillo y rápido para calcular los ángulos de los elementos es usar el producto vectorial o escalar.

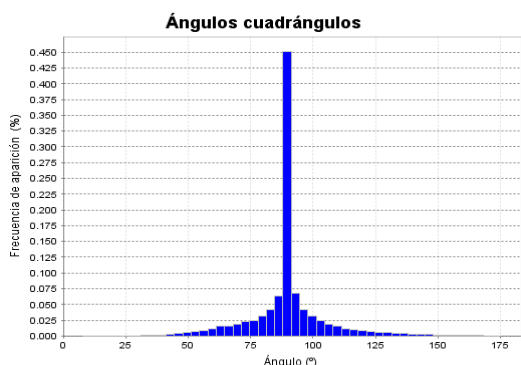


Figura 4.17: Ángulos internos de los cuadrángulos en el avión mallado con multinivel.

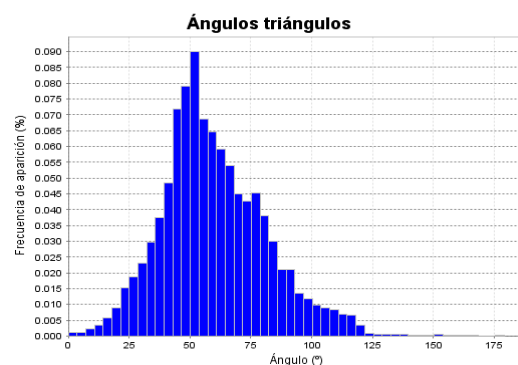


Figura 4.18: Ángulos internos de los triángulos en el avión mallado con multinivel.

- Áreas de las superficies que componen la geometría de entrada que se va a mallar (para el caso del avión, Figura 4.19). Esta información si resulta importante a la hora de mallar, ya que se usa para varios fines, como distribuir la carga entre los

procesadores o reservar la memoria necesaria para el mallado. Como las superficies de entrada son NURBS de orden arbitrario, el área se calcula aplicando la Integral de Gauss sobre la superficie parametrizada [10]. Con esta técnica, las áreas calculadas son exactas.

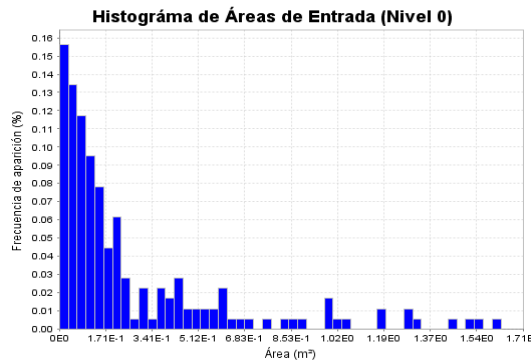


Figura 4.19: Áreas de entrada del avión.

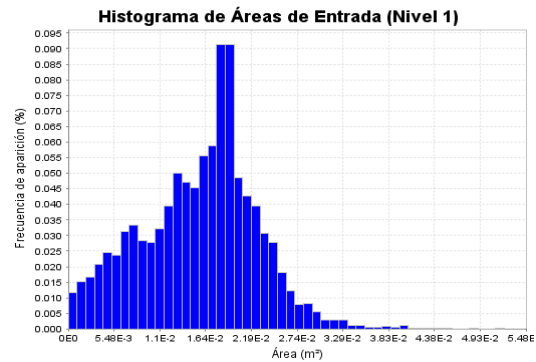


Figura 4.20: Áreas de entrada al segundo nivel en el avión mallado con multinivel.

- Áreas de las superficies de entrada en cada nivel de mallado, por lo que solo se aplica en casos grandes en los que es necesario mallar con más de un nivel (ya se han calculado las áreas de entrada del primer nivel). En el caso del avión, el histograma de áreas de entrada al segundo nivel se representa en la Figura 4.20. Estas áreas también se calculan mediante la integral de Gauss, con la salvedad de que ahora las superficies de entrada son parches de Bezier simples, resultantes de la salida de mallados previos.
- Áreas de los elementos de salida (para el caso del avión, Figura 4.21). Se calculan de la misma forma que las de entrada a los niveles posteriores al primero.

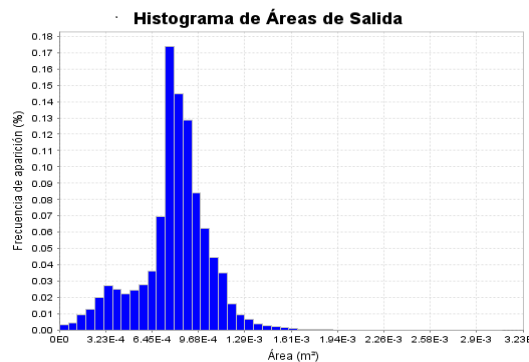


Figura 4.21: Áreas de salida del avión mallado con multinivel.

4.3.2. Aproximación volumétrica de capa fina

Como ya se introdujo con un ejemplo en el *Capítulo 3*, es posible generar una malla compuesta por capas de elementos superficiales paralelas, a partir de una malla superficial de un objeto cerrado.

Para que esta aproximación sea útil, hay que aplicarla sobre objetos que tienen un espesor pequeño, mientras que no es adecuada con volúmenes completamente macizos. Por ejemplo, un radomo modelado con dos capas de superficies paralelas y cerradas por sus contornos, separadas una distancia pequeña, es ideal para analizar con esta aproximación; pero no una esfera maciza de la que solo se tienen las superficies que componen su corteza.

El otro requisito importante es que los vectores normales de las superficies que forman los objetos estén orientados siempre hacia fuera, es decir, mirando en sentido contrario a donde se encuentran las superficies enfrentadas que cierran el objeto.

Al utilizar como entrada la malla superficial de la geometría, se trata de una etapa de postprocesado. Se emplea para aproximar el análisis de cuerpos volumétricos con un determinado espesor mediante tantas capas superficiales paralelas como requiera la longitud de onda de trabajo.

Partiendo de la malla superficial, se repite un proceso iterativo de proyección de elementos por capas, tomando siempre como referencia la capa inmediatamente anterior, hasta que no es posible generar más elementos a partir de los existentes.

La conversión de mallado superficial a aproximación volumétrica de capa fina se resume en los siguientes pasos:

1. Se calcula la distancia de cada elemento hasta el más cercano en la dirección contraria a su vector normal, para decidir si está lo suficientemente lejos como para seguir proyectando o se detiene la proyección a partir de él.

Para ilustrar el proceso, se toma como ejemplo la malla superficial de un volumen como la representada en la Figura 4.22. Todos los elementos de la malla, atenuados en color gris, están compuestos de sus 9 puntos de control, excepto tres elementos, E_1 , E_2 y E_3 , que se han resaltado en color negro. También se muestran las distancias, d_1 , d_2 y d_3 , resultantes de proyectar estos elementos en el sentido contrario a sus vectores normales y encontrar enfrentados otros

elementos. Aunque en este ejemplo, las distancias de proyección están en el punto central de los elementos para no cargar demasiado la figura, para calcularlas se proyecta desde cada punto que forma el elemento con su normal local en esa posición, y la solución válida para el elemento es la mínima distancia encontrada de las 9 proyecciones.

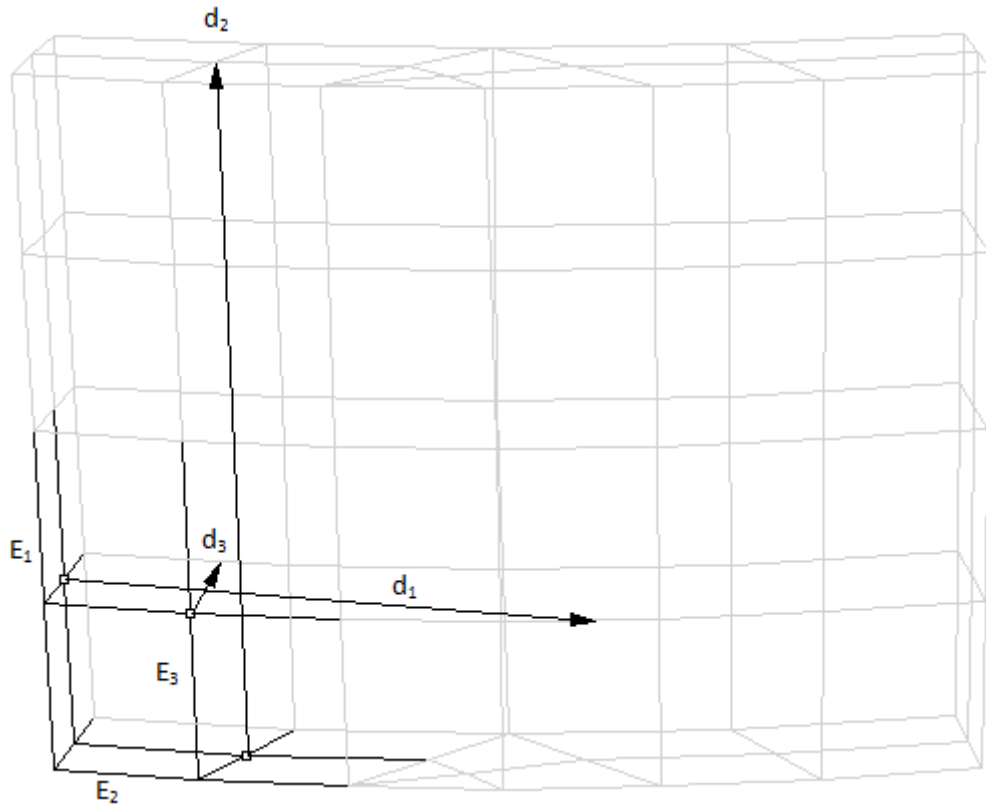


Figura 4.22: Distancia entre elementos en la aproximación volumétrica de capa fina.

2. Se proyectan todos los elementos que han sido marcados como válidos para generar la nueva capa, evaluando la calidad de los nuevos elementos y descartando aquellos que presentan deformaciones significativas. La proyección se realiza a partir de cada punto de control que forma el elemento, exceptuando al punto central del mismo, empleando la dirección contraria al vector normal local en ese punto, y modificándola cuando la continuidad entre elementos en contacto lo requiere (elementos situados en aristas). Una vez proyectados los ocho puntos que definen los lados del elemento, se obtiene el punto central como el promedio de los puntos ya calculados.

Continuando con el ejemplo del volumen anterior, en la Figura 4.23 se representa en color gris la capa exterior de elementos y en color negro la capa resultante de proyectar sus elementos. Se han resaltado tres tipos de puntos: uno de ellos está

en una esquina, por lo que se proyecta con la contribución promediada de los tres elementos que la forman; otro de ellos es el punto central de un elemento, que se obtiene promediando la posición del resto de puntos que forman el elemento; y por último, el punto central de un borde común a dos elementos que tienen el mismo vector normal, por lo que se proyecta con una única dirección.

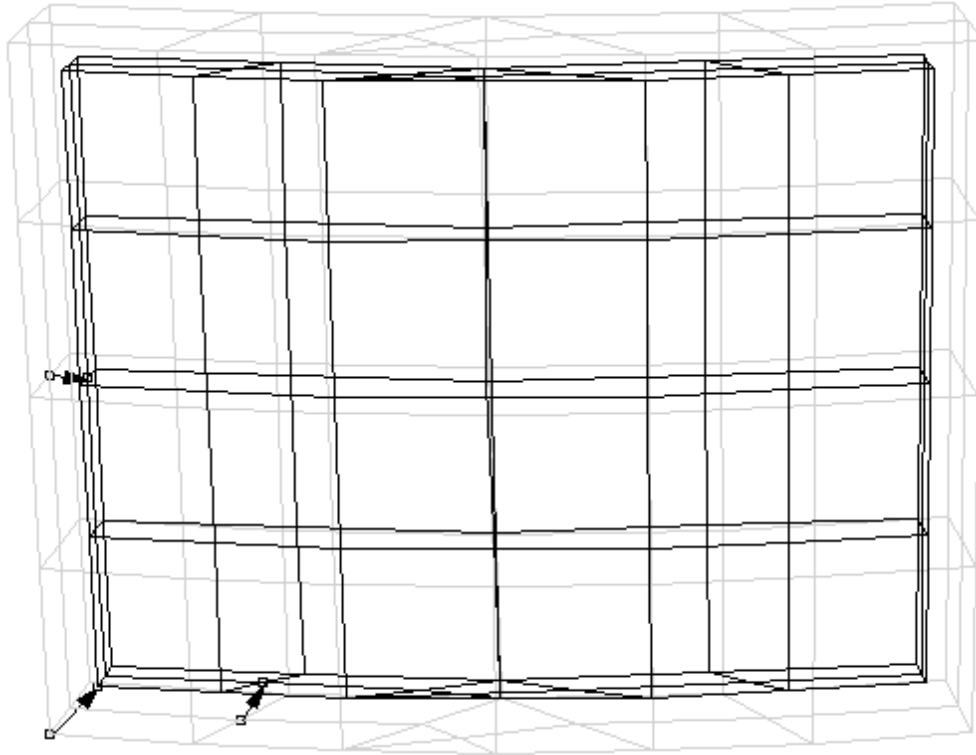


Figura 4.23: Proyección de una capa de elementos en la aproximación volumétrica de capa fina.

3. Se almacena la malla que se estaba estudiando como válida, y se toman los nuevos elementos generados como próxima malla base de proyección para la siguiente iteración, volviendo de nuevo al Paso 1 hasta que no sea posible generar nuevos elementos. En el ejemplo de la Figura 4.23, los elementos de color negro se convertirían en la capa exterior desde la que proyectar una nueva capa interior, si es viable con la distancia de proyección deseada.

Esta etapa ha sido paralelizada para mejorar su eficiencia, ya que el cálculo de las direcciones de proyección y la distancia a los elementos enfrentados son dos procesos lentos que requieren más tiempo a medida que crece el número de elementos en la malla inicial.

Para paralelizar el algoritmo, basta con repartir los elementos de cada malla en estudio entre los procesadores y tener en cuenta aquellos puntos de proyección que pertenecen a diferentes procesadores (por estar en diferentes elementos), ya que la contribución de los

vectores normales a la posición final de los puntos proyectados únicamente hay que sumarla una vez para cada dirección.

4.3.3. Rotación de la malla

Una de las propiedades del algoritmo desarrollado es la invariabilidad de la malla de salida ante el desplazamiento o la rotación de la geometría de entrada. No obstante, resulta más rápido y eficiente aplicar estos movimientos a la malla una vez obtenida que tener múltiples geometrías de entrada para cada posición de los objetos en estudio y mallarlos varias veces.

A pesar de la propiedad de invariabilidad, es posible que la malla cambie mínimamente con el mallador desarrollado, ya que aunque los puntos que definen a los elementos se generan con el mismo algoritmo, sus coordenadas exactas se consiguen realizando una búsqueda de puntos contenidos en las superficies originales para respetar las características originales. La búsqueda de puntos mediante el algoritmo del gradiente conjugado [11] es la que puede variar sus resultados ligeramente en función de la posición de las superficies, al estar condicionada la precisión de los puntos encontrados con errores numéricos. No obstante, la diferencia de los mallados será mínima, por lo que sigue resultando más interesante aplicar los movimientos a las mallas de salida que a las geometrías de entrada.

La traslación de mallados resulta muy sencilla, ya que únicamente hay que aplicar el desplazamiento deseado a las coordenadas de los puntos que forman la malla, por lo que no se entrará en detalle en esta sección. La rotación de una malla completa es otro caso sencillo, en el que al igual que para la traslación, solamente es necesario calcular la matriz de rotación [10] y aplicarla a todos los puntos de la malla. El caso interesante para analizar es aquel en el que la geometría contiene superficies fijas y superficies que pueden rotar con respecto a un eje.

Las mallas generadas se caracterizan por tener continuidad en todas las superficies vecinas de entrada, es decir, que los puntos frontera de las mismas coinciden.

Cuando se quiere aplicar una rotación solo a unas determinadas superficies, hay que tratar con especial atención la continuidad que estas pueden tener con superficies fijas. El ejemplo más sencillo es el de un cilindro que puede rotar, en contacto con una placa fija con un agujero circular, habiendo varios requisitos a tener en cuenta:

- Es imprescindible que todos los puntos de la frontera entre las partes fijas y las móviles sean equidistantes al eje de rotación y entre ellos, esto es, que formen una circunferencia y el eje sea perpendicular a su centro.
- A todos los puntos de la malla de las superficies en movimiento se les debe aplicar la matriz de rotación.
- Los puntos de la malla de las superficies fijas se deben mantener invariables.

Ante las dos últimas condiciones surge un problema: qué hacer con los puntos frontera entre elementos rotatorios y los fijos. Estos puntos se tratan de forma especial para no distorsionar demasiado la calidad de los elementos que los comparten, y además mantener la continuidad:

1. En primer lugar, se hace una distinción de los puntos de las partes móviles con las fijas, aislando los puntos que corresponden a fronteras comunes.
2. Para cada frontera común obtenida, se ordenan los índices de los puntos para que al recorrerlos se siga el contorno de la circunferencia que forman con respecto a su eje de rotación.
3. Una vez ordenados estos puntos frontera, se duplican, sustituyendo sus índices originales por los duplicados solo en los elementos que se van a rotar, y guardando la correspondencia entre cada punto original con su duplicado.
4. Se aplica la rotación a cada uno de los puntos que pertenecen a los elementos móviles, entre los que se encuentran los nuevos puntos frontera duplicados.
5. Una vez hecha la rotación, se busca para un punto cualquiera de los duplicados rotados cuál es su punto frontera original más cercano, obteniendo así un *offset* que indica el número de puntos que ha rotado el punto en estudio. Al tener las correspondencias de los originales con los duplicados, se aplica el desplazamiento obtenido del punto de referencia a los demás puntos frontera rotados, sustituyendo sus índices en los elementos rotados por los de los puntos frontera originales más cercanos.
6. Al completar la rotación, se eliminan los nuevos puntos duplicados, utilizados solo como puntos auxiliares.

Con este método, en realidad se discretiza el ángulo de rotación de los puntos frontera en fracciones de 360° entre el número total de puntos de la frontera, pero el resto de puntos móviles tienen la rotación deseada. Así, los elementos de la frontera sufren una pequeña deformación, que es máxima cuando el ángulo de rotación es igual al ángulo medio entre dos nodos de la frontera de rotación consecutivos, pero esto apenas influye en los resultados, cosa que si ocurriría si se estuviera perdiendo la continuidad.

Para entender en qué consiste la rotación continua explicada, se ilustra un ejemplo de la misma en la Figura 4.24², donde se tiene una placa plana cuadrada con un agujero circular en el centro por el que se une a un cilindro. Se ha aplicado una rotación de 10° a la placa para tener una deformación máxima, ya que los nodos que forman los elementos de la unión se han generado aproximadamente cada 20° . En la parte izquierda de la imagen, se representa la malla de la geometría original, diferenciando en color gris la placa rotatoria y en turquesa el cilindro fijo. La imagen central muestra la placa rotada y el cilindro en su posición original, resaltando una zona de la unión, que se ha ampliado en la imagen de la derecha para mostrar la deformación de los elementos. En la parte derecha de la figura, se muestran algunos de los elementos originales en turquesa, y sus elementos resultantes de la rotación en color gris, diferenciando entre los elementos representados según sus nodos (imagen superior), y los parches de Bézier resultantes de la interpolación de los mismos (imagen inferior).

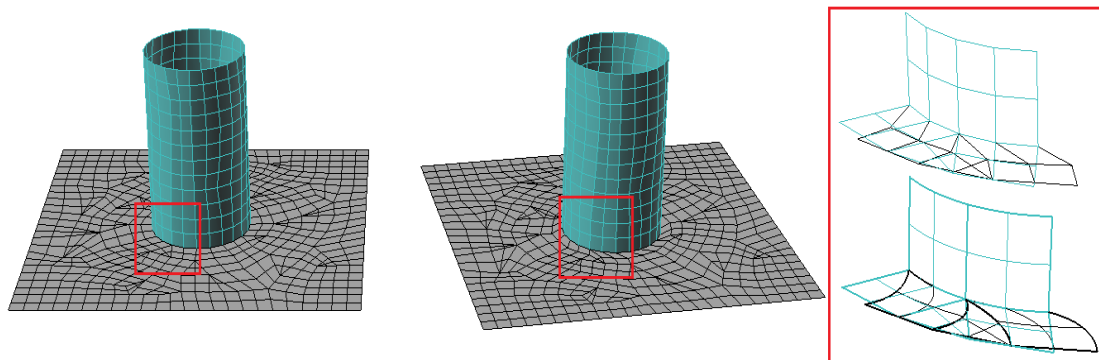


Figura 4.24: Placa cuadrada rotada unida a un cilindro fijo.

La deformación no es nunca mayor que la mitad del ángulo máximo de separación entre los nodos frontera consecutivos de la zona de unión, ya que cuando los nodos móviles de la frontera superan un ángulo mayor, se unen automáticamente con el siguiente punto, minimizando así la deformación. Se saltan tantos nodos como es necesario hasta minimizar la deformación de los elementos en el proceso de rotación y unión.

² Imagen obtenida de [9]

En la Figura 4.25³, se muestra el caso de una rueda a la que se le aplica la rotación de 30° con respecto al eje de la misma a los elementos de color gris, manteniendo fijos los representados en turquesa. Esta rotación no tiene ningún sentido real, pero sin embargo, muestra con claridad cómo se minimiza la deformación de los elementos al producirse el salto de elementos explicado anteriormente. En la parte izquierda, se muestra la posición original de la rueda, y en la parte derecha, la malla resultante al aplicar la rotación: se ha rotado la parte que representa la llanta y la parte de neumático que no está en contacto con el suelo, dejando fija la que está en contacto con el suelo. En este caso, se observa el salto de elementos anteriormente mencionado, de tal manera que no se deforman los elementos frontera.

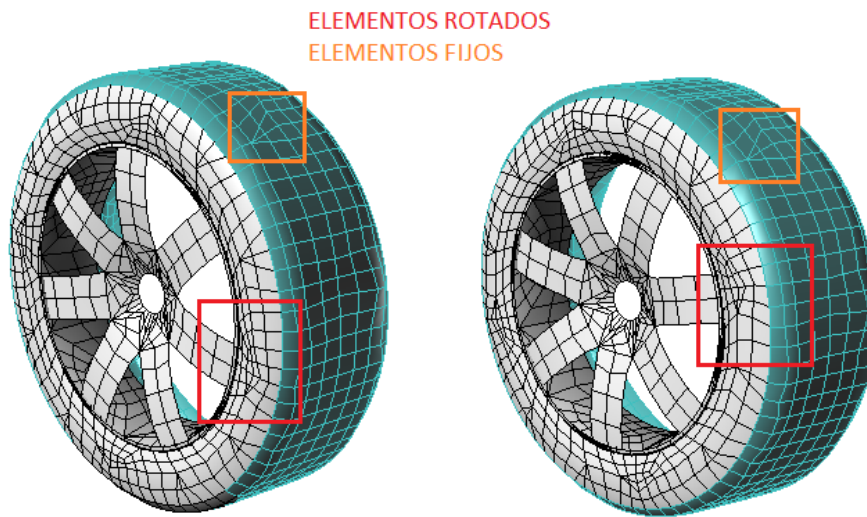


Figura 4.25: Rueda rotada con respecto a su eje.

Se puede aplicar tantas rotaciones como se desee sobre una malla dada, indicando las superficies a rotar, los ejes y sus ángulos de rotación. En caso de que haya fronteras como las mostradas en el ejemplo de la placa o la rueda, con elementos fijos unidos a otros rotatorios, los puntos que forman la frontera de unión deben ser equidistantes al eje de rotación.

4.3.4. Evaluación de la calidad de la malla

Idealmente, una malla siempre estaría compuesta por elementos cuadrados perfectos, con todos sus lados iguales y todos sus ángulos interiores de 90° . Pero en la realidad, esto rara vez ocurre, y suelen aparecer elementos rectangulares en el mejor de los casos, y trapezoidales o triangulares, en el peor. En los casos más extremos, estas deformaciones pueden provocar claros problemas de convergencia al simular las mallas.

³ Imagen obtenida de [9]

Dos son los principales motivos que pueden dar lugar a la aparición de elementos no ideales:

- La propia forma de la superficie lo impone. Esto ocurre siempre que la superficie contiene ángulos interiores entre en sus curvas de contorno que no son múltiplos de 90° , como el caso de triángulos, trapecios, rombos o arcos.
- Los elementos se deforman al resolverse intersecciones o relaciones de proximidad entre los elementos generados y otros ya existentes. Cuando se resuelve este tipo de uniones, se intenta que los elementos resultantes sean lo más ideales posible, pero aun así, puede haber deformaciones. Esto ocurre especialmente en superficies curvadas.

Los elementos irregulares pueden llegar a casos muy extremos, teniendo ángulos, longitudes de bordes, o áreas demasiado pequeños para la frecuencia de análisis electromagnético, que pueden dar lugar a problemas de convergencia.

Además de la deformación de los elementos, la aparición de elementos aislados también resulta fatal para la convergencia de algunos métodos de análisis electromagnético, es decir, elementos que no se encuentran en contacto con ningún otro elemento.

El último caso desfavorable para la convergencia se da cuando aparecen elementos solapados. Esto nunca ocurrirá si se malla una geometría bien modelada para ser analizada electromagnéticamente, pero es muy frecuente en el modelado de geometrías para otros fines, como maquetas con alto nivel de detalle. En esos casos, las geometrías suelen estar compuestas por superficies que se solapan parcialmente, por lo que interesa mallarlas y a posteriori, descartar los elementos de las partes que se solapan para dejar una única capa de elementos en toda la malla.

En esta sección se utiliza como geometría de ejemplo la representada en la Figura 4.26, compuesta por 11 superficies numeradas: las superficies *S1*, *S2*, *S3* y *S4* son cuatro sectores circulares que forman un círculo completo; la superficie *S5* es una tira rectangular; las superficies *S6*, *S7* y *S8* son cuatro placas cuadradas, estando en contacto *S6* y *S7*, y aislada *S8*; las superficies *S9* y *S10* son dos placas cuadradas muy pequeñas en contacto, y la superficie *S11* es una placa cuadrada que se encuentra solapada (en el mismo plano) en algunas zonas con las superficies *S1*, *S2*, *S3* y *S4*. La malla resultante de esta geometría usando un tamaño de elementos aproximadamente igual que las dimensiones de *S6* se muestra en la Figura 4.27,

donde se observa el solapamiento de elementos entre el círculo y la placa *S11*, además de dos elementos muy pequeños debidos a las superficies *S9* y *S10*.

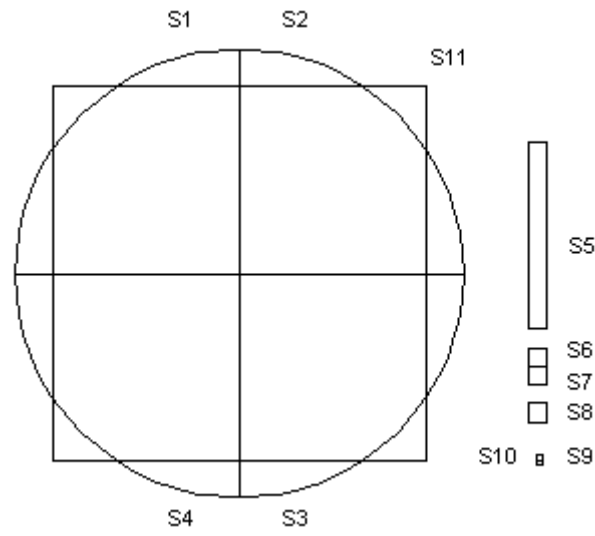


Figura 4.26: Ejemplo de geometría inadecuada para mallar.

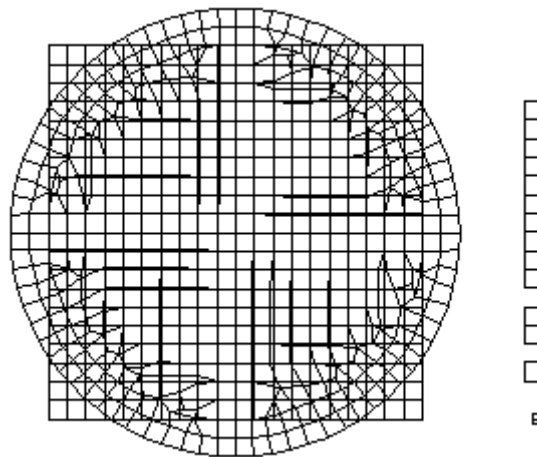


Figura 4.27: Malla de la geometría inadecuada.

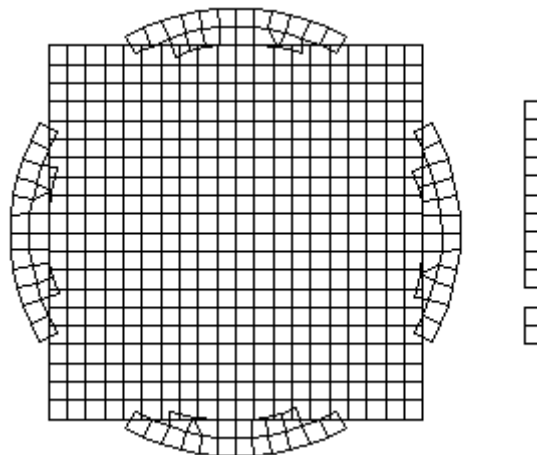


Figura 4.28: Malla corregida de la geometría inadecuada.

Para detectar y descartar todos los elementos de una malla generada que puedan dar problemas al simular, se ha complementado el algoritmo de mallado con una etapa de depuración, que consta de las siguientes fases ordenadas en las que se va reduciendo el número de elementos a analizar:

1. En primer lugar, se establecen las relaciones de vecindad (topologías) entre los elementos, descartando aquellos que están aislados. En el ejemplo de la Figura 4.26 y su malla de la Figura 4.27, aparece un elemento aislado que se corresponde con la superficie de entrada *S8*, y que hay que eliminar, como se muestra en la malla depurada de la Figura 4.28.
2. Se calculan las áreas de todos los elementos, eliminando aquellos que son demasiado pequeños con respecto al tamaño deseado de referencia. Esto puede ocurrir en geometrías que tienen detalles muy pequeños que se pueden considerar despreciables a la longitud de onda de análisis, configurando el tamaño mínimo permitido como parámetro de entrada. Siguiendo con el ejemplo de la geometría de la Figura 4.26 y su malla de la Figura 4.27, los dos elementos resultantes de mallar las superficies *S9* y *S10* se eliminan al aplicar este criterio, como se observa en la malla corregida de la Figura 4.28.
3. Se hace una preselección de elementos próximos, y entre los escogidos se examina si hay alguno solapado. En caso positivo, se eliminan tantos como sea necesario hasta conseguir una sola capa de elementos no solapados. Para no romper en la malla la forma de todas las superficies solapadas, por convenio se mantienen siempre los elementos que pertenecen a las superficies de mayor área. En la geometría de la Figura 4.26 y su malla de la Figura 4.27, hay solapamiento entre las superficies *S1*, *S2*, *S3* y *S4* con la superficie *S11*, y como la superficie *S11* tiene mayor área que las otras, se eliminan los elementos de las superficies *S1*, *S2*, *S3* y *S4* que se solapan con los de *S11*, como se puede ver en la malla corregida de la Figura 4.28.
4. Para concluir, se recorren las relaciones de vecindad de los elementos obtenidas en el primer paso, y si algún elemento de los que quedan identificados como válidos ha quedado aislado, como consecuencia de alguna de las comprobaciones anteriores, se elimina. En el ejemplo de referencia, esta etapa no ha descartado ningún elemento.

Para un mismo mallado de entrada a la etapa de evaluación, varia el número de elementos descartados en función de la longitud de onda en estudio.

Esta etapa ha sido paralelizada para mejorar su eficiencia. La distribución de carga es sencilla, ya que los procesadores se reparten por igual el número de elementos a analizar y les aplican las comprobaciones explicadas, recopilando al final del proceso la información de los elementos descartados en un único procesador, para generar la malla final corregida.

4.4. OPTIMIZACIÓN DE VELOCIDAD

Tras conseguir un algoritmo robusto capaz de generar millones de elementos en una malla, los recursos de tiempo y memoria de CPU requeridos para ello se convierten en el principal problema.

Para tratar de reducir los tiempos de ejecución de los programas, es posible encontrar múltiples soluciones válidas para la mayoría de ellos, sin importar su función en sí, como puede ser la ejecución multiprocesador, el uso de FPGAs (*Field Programmable Gate Array*), de GPUs (*Graphics Processing Unit*), etc. [12], [13]. Numerosos estudios dan como mejores soluciones a las FPGAs y las GPUs, pero ambas tienen los inconvenientes de ser soluciones hardware de las que no siempre se dispone, además de ser mucho más complejas de programar y depurar errores que la opción multiprocesador.

En los algoritmos desarrollados en esta tesis, se ha optado por el uso de múltiples procesadores como solución genérica, ya que cualquier equipo actual dispone de varios procesadores que pueden ser utilizados eficientemente. También se han implementado algunas técnicas software específicas, que modifican los algoritmos originales para minimizar sus tiempos de ejecución.

4.4.1. Mallado superficial

Para minimizar los tiempos de mallado superficial, se recurre a la ejecución multiprocesador, concretamente por medio de paso de mensajes MPI (*Message Passing Interface*) [14]. Para complementarla, también se ha implementado una técnica propia de mallado, llamada multinivel, obteniendo con la combinación de ambas, porcentajes de reducción de tiempos más que aceptables.

4.4.1.1. Paralelización

Para la correcta paralelización de cualquier herramienta, es necesario hacer un análisis previo para identificar qué partes deben ser comunes a los procesadores y cuáles pueden ser independientes, garantizando siempre que el número de procesadores empleados no altera la solución final. Además, hay que evaluar el tiempo de ejecución de las partes independientes para verificar si realmente es un beneficio o un inconveniente el paralelizarlas.

Un requisito del mallado ya mencionado, es la continuidad entre las superficies de la geometría de entrada: dicha continuidad no se tiene en cuenta si comparten puntos con idénticas coordenadas, si no que los puntos compartidos entre ellas tienen que ser los mismos (mismo índice). Para satisfacer esta condición, el primer paso tras cargar las superficies, es detectar las relaciones de continuidad entre las que están en contacto. Antes de comenzar a mallar, todos los procesadores calculan las topologías de forma independiente. Posteriormente se generan los nodos frontera de todas las superficies que componen la geometría, insertando los nodos frontera de una curva de contorno si es la primera superficie que se procesa, o cargando los ya generados por la superficie en contacto procesada si es posterior. Este proceso lo realizan todos los procesadores, para que así comiencen a mallar exactamente con los mismos nodos frontera.

Una vez que se tienen los nodos frontera, se distribuye la carga de las superficies a mallar por cada procesador, para procesar las partes asignadas independientemente del resto. La forma más sencilla de distribuir la carga sin intercambiar información entre procesadores mientras mallan, es hacerlo por superficies completas, de tal manera que se ordenan las superficies por área, y con ese orden se van asignando de una en una a cada procesador, para tratar que todos los procesadores tengan un área total a mallar similar.

Cuando todos los procesadores han mallado sus superficies, estos intercambian la información necesaria para generar un fichero de salida único y ordenado. El proceso de mallado en paralelo queda resumido en el diagrama de flujo de la Figura 4.29.

La paralelización de la herramienta reduce de forma significativa los tiempos de mallado a medida que aumenta el número de procesadores. Además, el uso de varios procesadores distribuye la memoria total requerida, lo que permite mallar casos más grandes que con un solo procesador por las limitaciones de memoria por proceso. Por ejemplo, el máximo de elementos o puntos en la malla permitido en un procesador está acotado por el máximo representable con una variable entera.

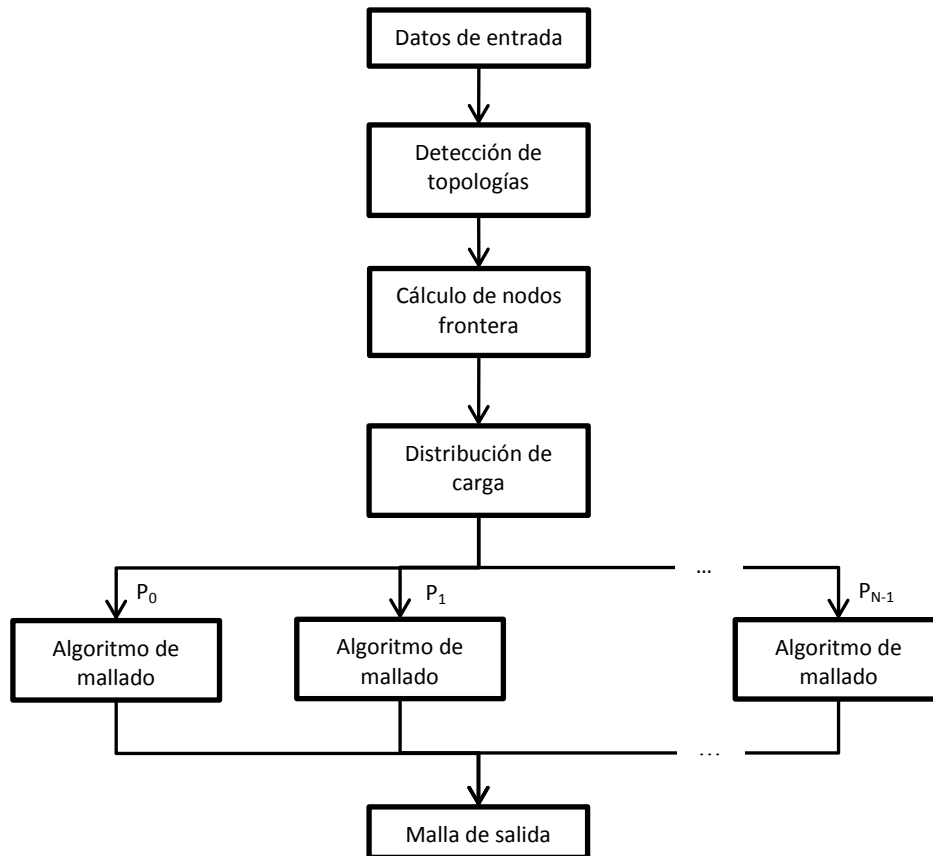


Figura 4.29: Diagrama de flujo del mallado superficial multiprocesador.

Como ejemplo, el avión de la Figura 4.12 que se ha mallado en 2 minutos y 20 segundos con 120.000 elementos en la sección 4.3.1, usando 6 procesadores en 2 niveles de mallado; requiere 6 minutos y 53 segundos para mallar con la misma configuración pero usando solamente un procesador, por lo que el uso de 6 procesadores nos permite reducir el tiempo de mallado al 30 por ciento. Se verán más ejemplos en el capítulo de *Resultados*.

4.4.1.2. Modo multinivel

A pesar de reducir los tiempos de mallado en la mayoría de casos utilizando múltiples procesadores, la distribución de carga por superficies completas se convierte en un cuello de botella cuando la geometría tiene superficies que requieren muchos elementos. El caso más sencillo para tomar como ejemplo es el de una placa plana que se desea mallar con muchos elementos: independientemente del número de procesadores que se utilicen, toda la carga irá a un solo procesador que realice todo el trabajo, y el resto de procesadores no hará nada.

El modo multinivel es una característica añadida al algoritmo de mallado, que resulta muy útil al reducir de forma significativa el tiempo requerido para mallar casos con un número alto de elementos. Es especialmente eficiente cuando las geometrías de entrada están

compuestas por superficies de tamaños muy diferentes, que pueden ocasionar que se eternice el mallado de las superficies grandes en comparación con el de las pequeñas.

Este modo de mallado pretende acelerar al máximo el algoritmo, realizando mallas intermedias que sirven como nueva entrada a los niveles posteriores a mallar. Así, se consigue que las geometrías de entrada de cada nivel estén compuestas por superficies más homogéneas en tamaño y formas que la geometría original, pudiéndose mallar con mayor facilidad. También permite un reparto de carga más equitativo entre los procesadores.

Las mallas generadas en niveles intermedios pueden ser procesadas como nuevas geometrías de entrada de forma mucho más rápida que la geometría original de superficies paramétricas arbitrarias, ya que no tienen que preprocesarse prácticamente.

Hay que tener especial cuidado con el número de niveles que se emplea y el número de elementos que se generan en cada uno de ellos. Por una parte, si se usan muchos niveles se pierde la eficiencia del método. Por otra parte, si se generan demasiados elementos en los niveles intermedios, se requiere una reserva excesiva de memoria para almacenarlos y además se ralentiza el mallado por las etapas de preprocesado.

Una vez que se ha cargado la geometría completa, se realiza una estimación del número de elementos a generar con el tamaño deseado. Si el número de elementos estimado es lo suficientemente grande, la malla automáticamente se genera en varios pasos. El número de niveles a realizar también se calcula de forma automática, de tal manera que no se dispare la memoria reservada ni los tiempos de mallado por nivel.

El número de elementos generados para una misma geometría empleando el modo multinivel es diferente al conseguido en el modo directo, ya que al emplear mallas intermedias, las geometrías de entrada varían en los niveles posteriores con respecto al primero, y por tanto los mallados son distintos. No obstante, el número final de elementos debe ser próximo en ambos casos.

En la Figura 4.30 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de mallado cuando se emplea el modo multinivel, que consiste en los siguientes pasos:

1. Se carga la geometría original y todos los datos de configuración, como el tamaño de los elementos deseado, el ángulo máximo permitido para discretizar las curvaturas, etc.

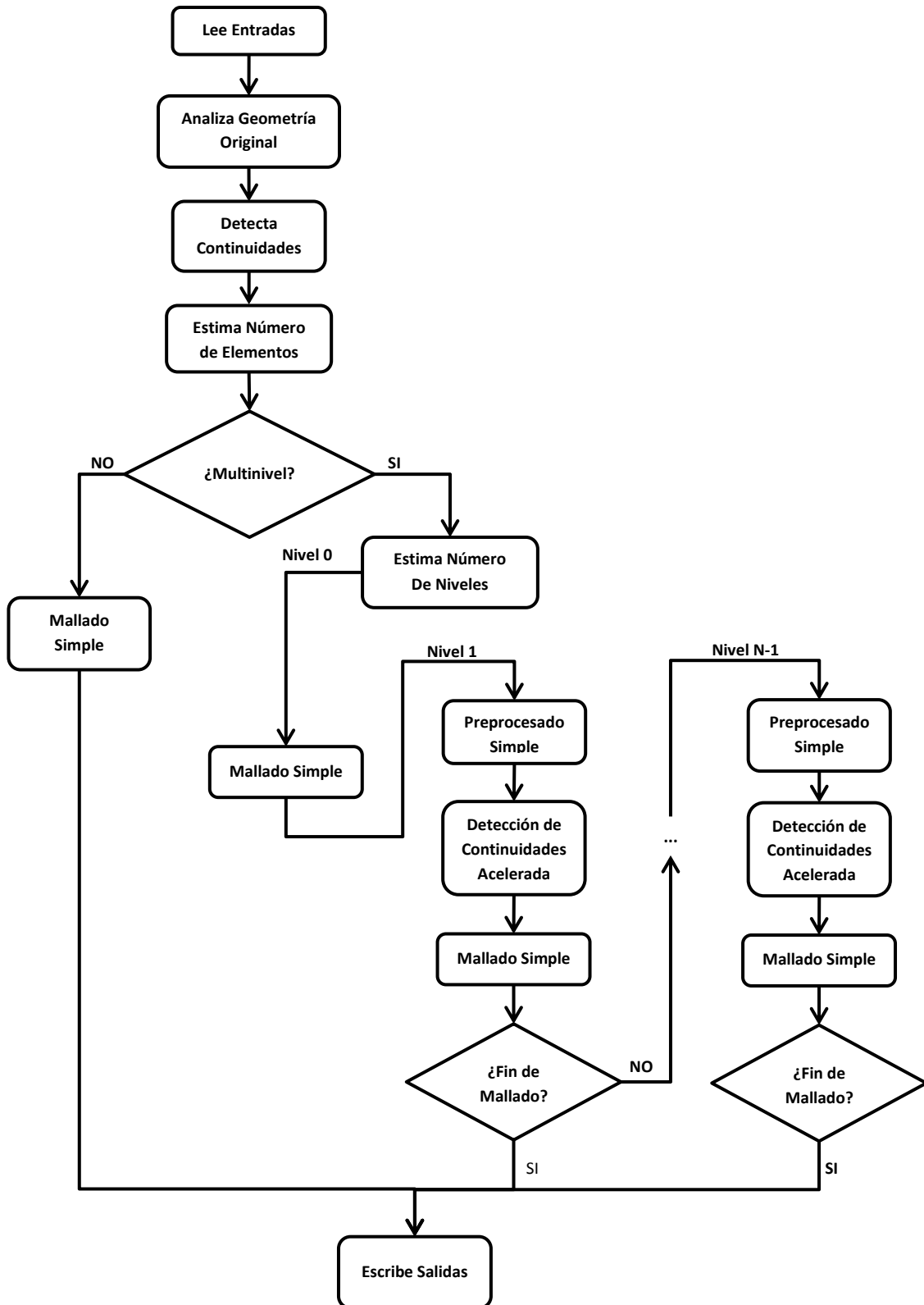


Figura 4.30: Diagrama de flujo del modo de mallado multinivel.

2. Análisis de la geometría. Es necesario identificar las formas y los tamaños de las superficies que la componen, para así simplificar o descartar aquellas que no son adecuadas para mallar directamente. Por ejemplo, es más sencillo mallar un

cilindro compuesto por cuatro superficies resultantes de revolucionar una línea 90° , que mallar uno formado por una sola superficie cerrada; por lo tanto, en la etapa de preprocesado, el caso de la superficie cerrada se divide internamente en varias superficies más sencillas.

3. Cuando se requiere la continuidad en la malla, se calculan las topologías entre las superficies que forman la geometría.
4. Conociendo las dimensiones y características de la geometría original, se estima el número total de elementos para mallar con el tamaño de elementos deseado. Si este número es demasiado grande y además la geometría esta compuesta por superficies que requieren muchos elementos, se activa el modo multinivel.
5. Si se considera oportuno mallar en un único nivel, se aplica el algoritmo de mallado directamente sobre la geometría de entrada, con el tamaño deseado de elementos.
6. Si es necesario mallar en varios niveles, se evalúa el número de niveles a utilizar, así como el tamaño de los elementos en cada nivel. Es necesario conseguir que el número de elementos a generar por cada superficie sea cada vez más parecido en los niveles posteriores al nivel 0 (elementos de mayor tamaño) para que el reparto de carga por superficies entre procesadores se equilibre. Además, el número de elementos por superficie en cada nivel no debe ser muy grande, ya que consumiría mucho tiempo de mallado, ni muy pequeño, porque malgastaría tiempo en el preprocesado.
7. El algoritmo de mallado se aplica en cada nivel con su tamaño de elementos calculado, tomando como geometría de entrada la salida de su nivel inmediatamente anterior. En los niveles posteriores al 0, la geometría de entrada es una malla, por lo que se pueden omitir ciertas etapas de preprocesado como la corrección de superficies cerradas, y simplificar otras como el cálculo de dimensiones de las nuevas superficies de entrada.
8. La detección de topologías sobre una malla de entrada, no se basa en la búsqueda de puntos sobre superficies, sino en la búsqueda de puntos coincidentes (en índice) entre elementos. Esta operación es muy rápida en comparación con la equivalente sobre una geometría arbitraria hecha por superficies paramétricas.

9. Una vez que se completa el último nivel de los N estimados, se procesa toda la información necesaria para generar los ficheros de salida finales, que se corresponden con el tamaño de elemento deseado.

Como ejemplo de la eficiencia del modo multinivel, en la Tabla 4.1 se resumen los tiempos recogidos en secciones anteriores al mallar el avión de la Figura 4.12 con multinivel, incluyendo ahora los tiempos obtenidos al repetir los mallados sin multinivel. En este ejemplo, el modo multinivel reduce el tiempo de mallado al 41 por ciento tanto con 1 como con 6 procesadores. Al combinar el modo multinivel y el uso de 6 procesadores con respecto a 1 procesador sin multinivel, se reduce el tiempo de mallado al 14 por ciento, cuantificando en este ejemplo la eficiencia de las dos técnicas de aceleración implementadas con unos resultados bastante aceptables. En el capítulo de *Resultados* se presentarán más ejemplos.

	Tiempo de mallado (s)	
	1 procesador	6 procesadores
Modo Simple	993	341
Modo Multinivel	413	140

Tabla 4.1: Tiempos de mallado del avión de la Figura 4.12.

4.4.2. Mallado volumétrico

A pesar de la sencillez del algoritmo de mallado volumétrico, en el que no es necesario evaluar las intersecciones ni la calidad de los elementos resultantes, la clasificación de los puntos que componen los elementos como internos o externos al volumen es un proceso lento.

Las técnicas de aceleración del algoritmo de clasificación, como el uso de cajas contenedoras o la búsqueda de la dirección de proyección óptima reducen los tiempos de mallado, pero a medida que aumenta la resolución de la malla, se hace necesario emplear otros métodos para acelerar el proceso.

Al igual que se ha hecho para el mallado superficial, la versión volumétrica también ha sido paralelizada empleando MPI.

4.4.2.1. Paralelización

Como ya se explicó en el *Capítulo 3*, el método implementado para cubicar volúmenes macizos es sencillo, e independientemente del modo escogido (aproximación interior,

aproximación de la forma o aproximación con unión), los pasos son los mismos y los elementos no se modifican una vez que se han generado.

El único cuello de botella en el algoritmo de mallado volumétrico implementado es la clasificación de puntos. Es por ello que solamente se ha paralelizado esta etapa, para que cada procesador aporte la información relativa a sus puntos y solo uno de ellos se encargue de recopilarla y generar la malla final.

Como la rejilla de puntos a clasificar es claramente estructurada (puntos equidistantes según los ejes cartesianos) y la geometría puede tener formas arbitrarias, la distribución de carga entre procesadores más sencilla consiste en dividir la dimensión que contiene más puntos entre el número de procesadores. Con este reparto, cada procesador hace un barrido para los puntos que se le han asignado en la mayor dimensión, evaluando todos los puntos en las otras dos dimensiones.

Considerar el ejemplo del elipsoide mostrado en la Figura 4.31, representado junto con la rejilla de puntos centrales a clasificar para el cubicado, tal que se tiene una distribución de $N_x=11$, $N_y=6$ y $N_z=6$ puntos según los ejes cartesianos. En esta rejilla, es la dimensión en el eje x la que se reparte entre los procesadores, por lo que sería posible mallarla de forma eficiente con un máximo de 11 procesadores, ya que en caso de emplear más habría procesadores sin carga.

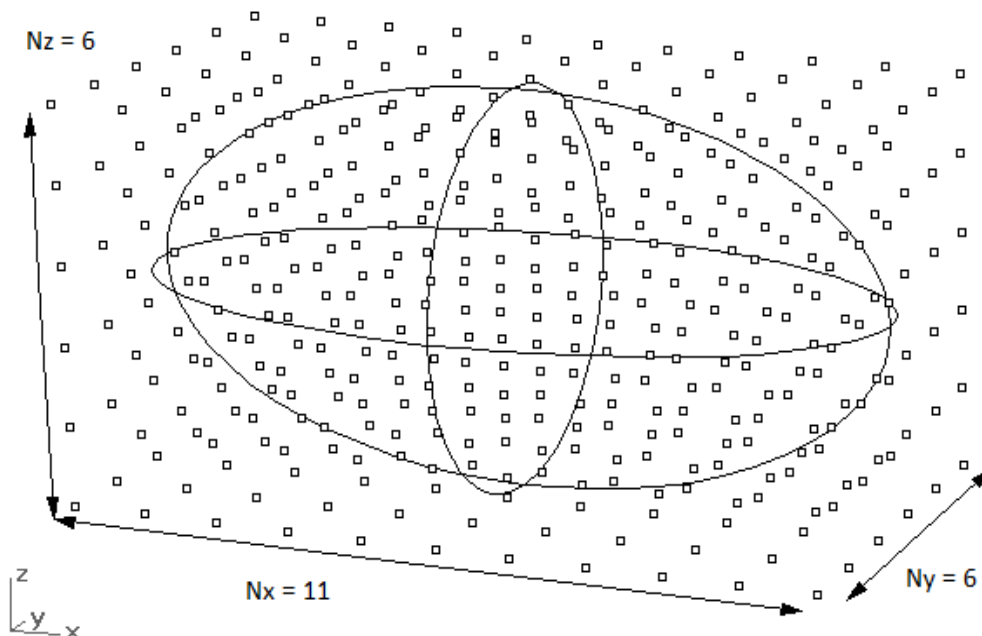


Figura 4.31: Distribución de puntos centrales en mallado volumétrico.

No obstante, esta distribución de carga no siempre es la más efectiva, ya que por lo general, las geometrías no tendrán una simetría tan clara y es posible que a algunos

procesadores se les asigne la mayoría de puntos externos (más rápidos de procesar), y a otros los más internos (más lentos de procesar), desbalanceando considerablemente los tiempos requeridos por cada procesador.

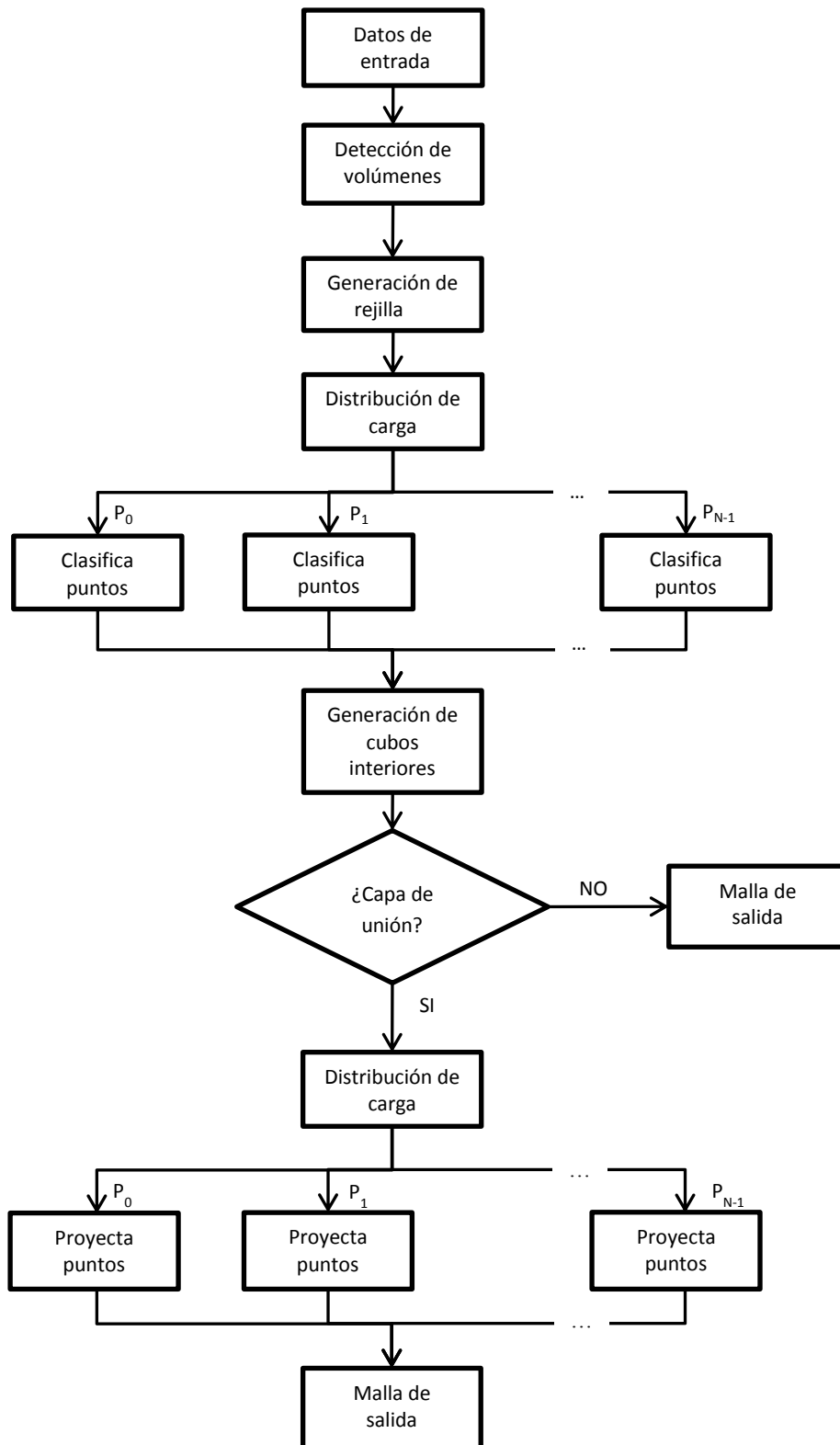


Figura 4.32: Diagrama de flujo del mallado volumétrico en paralelo.

Una vez procesados los puntos, un procesador recopila las clasificaciones del resto y genera los elementos para los puntos válidos. Cuando también se desea generar la capa de unión entre el mallado interior y la corteza del volumen, se vuelve a hacer un reparto de las caras externas de la capa mas exterior del mallado interno, para que cada procesador trate de proyectar el mismo número de puntos, y finalmente se obtenga una única malla continua.

La Figura 4.32 presenta el diagrama de flujo del mallado volumétrico al emplear N procesadores. Observando el diagrama, el algoritmo finaliza tras generar los cubos interiores al volumen, o tras generar la capa de unión entre estos y la corteza de la geometría cuando así se desea. Como se ha comentado anteriormente, únicamente se procesan en paralelo las etapas de clasificación y proyección de puntos. Con la paralelización, los tiempos de cubicado tienden a ser inversamente proporcionales al número de procesadores empleados.

4.5. REFERENCIAS

- [1] E. García García, «Contribución al análisis de problemas electromagnéticos mediante el Método de los Momentos con bajo coste computacional», Alcalá de Henares: Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá de Henares., 2005.
- [2] A. Cardama, L. Jofre, J. M. Rius, J. Romeu, S. Blanch y M. Ferrando, «Antenas», Barcelona, España: Edicions UPC, 2002.
- [3] I. González, E. García, F. S. d. Adana y M. F. Cátedra, «Monurbs: A Parallelized Fast Multipole Multilevel Code For Analysing Complex Bodies Modelled By NURBS Surfaces», *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, vol. 23, nº 2, pp. 134-142, 2008.
- [4] P. Brunet y A. Vinacus, «Modelado Geométrico: Métodos y Aplicaciones», de *Seminario organizado por la Universidad de Cantabria*, Santander, 1990.
- [5] M. R. Hestenes y E. Stiefel, «Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems», *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, nº 6, pp. 409-436, 1952.
- [6] J. Moreno, L. Hernández, I. González y F. Cátedra, «Modelado automático del efecto borde en el mallado de circuitos impresos», de *Libro de Actas del XXVII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*. Elche, Alicante, España. Septiembre de 2012.
- [7] R. J. Cass, S. E. Benzley, R. J. Meyers y T. D. Blacker, «Generalized 3D Paving: An automated quadrilateral surface mesh generation algorithm», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, nº 9, pp. 1475-1489, 1996.
- [8] J. Moreno, M. J. Algar, I. González y F. Cátedra, «Redesign and optimization of the paving algorithm applied to electromagnetic tools (invited paper)», *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 29, pp. 409-429, 2011.
- [9] J. Moreno, «Contribución a la Mejora de los Mallados sobre Superficies Paramétricas en Geometría Computacional», Alcalá de Henares, Madrid, España: Universidad de Alcalá, Trabajo Fin de Máster, 2011.
- [10] G. Farin, «Curved and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A practical Guide.», Orlando: Academic Press, 1996.
- [11] K. A. Atkinson, «An introduction to numerical analysis», John Wiley and Sons., 1988.

- [12] S. Che; J. Li; J. W. Sheaffer; K. Skadron; J. Lach, «Accelerating Compute-Intensive Applications with GPUs and FPGAs», de *Proceedings of the 2008 Symposium on Application Specific Processors (SASP '08)*, Anaheim, California, USA., 2008.
- [13] C. Grozea, Z. Bankovic y P. Laskov, «FPGA vs. Multi-Core CPUs vs. GPUs: Hands-on Experience with a Sorting Application», de *Facing the multicore-challenge 2010*, Heidelberg, Germany., 2010.
- [14] MPI Forum, «MPI Forum,» [En línea]. Disponible: www.mpi-forum.org. [Último acceso: Julio 2012].

5. RESULTADOS

5.1. INTRODUCCIÓN

Una vez conocidas las técnicas de preprocesado, mallado y postprocesado usadas en la herramienta desarrollada, así como los métodos electromagnéticos con los que se pretenden analizar las mallas generadas, es necesario evaluar si estas cumplen los requisitos previstos. A modo de resumen, los principales objetivos son:

- Disponer de un algoritmo de mallado capaz de trabajar con geometrías diseñadas con distintas herramientas de CAGD y con diversas finalidades, cuyos modelos no siempre están orientados al análisis electromagnético.
- Implementar un mallador propio e independiente, que se adapte correctamente a las herramientas para las que está diseñado.
- Minimizar los tiempos y recursos de mallado, de tal manera que este proceso sea casi transparente al usuario en el desarrollo de una simulación completa.
- Dotar a la herramienta de efectos adicionales a su principal finalidad, como el emplazamiento de antenas embarcadas en estructuras arbitrarias garantizando la continuidad eléctrica, o el modelado del efecto borde en las superficies malladas.

La finalidad de este capítulo es recopilar una colección de casos que sirven para verificar el mallador desarrollado. Ante la diversidad de los requisitos de la herramienta, por una parte, se estudian algunos casos sencillos para reforzar las bases teóricas explicadas en los capítulos anteriores; y por otra parte, se analizan casos reales para verificar los resultados.

Los primeros casos presentados estudian, por separado, la eficiencia de las diversas técnicas de aceleración implementadas en el algoritmo de mallado. Una vez hecho esto, se presentan los resultados del análisis electromagnético de mallas procedentes de diferentes malladores para corroborar que los conseguidos con la herramienta desarrollada son coherentes. Además, también se comparan los propios resultados al usar o no las técnicas de aceleración, para demostrar que se mantiene la fiabilidad.

Una vez verificada la herramienta, se presenta una serie de simulaciones de casos reales que entrelazan los diversos aspectos estudiados a lo largo de la tesis, para tratar de cubrir la mayoría del contenido teórico con resultados prácticos. Algunos de estos trabajos contienen referencias propias, ya que han sido publicados tanto en congresos nacionales o internacionales como en revistas. Todas las simulaciones se han realizado utilizando la herramienta NewFasant [1].

5.2. PLACA PLANA CUADRADA

El primer aspecto a analizar es la relación entre el número de elementos a generar en una determinada superficie y el tiempo necesario para mallarla. Para ello, se estudia el tiempo de mallado de una placa plana cuadrada de 1 m^2 de área cuando se varía el tamaño deseado de los elementos, empleando un solo procesador.

Se trata de un caso muy sencillo en el que los tiempos de mallado con cualquier densidad de elementos son menores que los que se requieren para geometrías de mayor complejidad, como puede ser un cono o formas no canónicas. Esto se debe a que en el caso de la placa cuadrada, se sabe que siguiendo el algoritmo de *paving* [2], los elementos generados son cuadrados perfectos, y además las filas se insertan desde la frontera de la superficie hacia el interior. Durante el mallado, no se producen intersecciones hasta llegar al centro de la placa, por lo que el algoritmo es muy rápido ya que no hay que procesar parches deformes o intersecciones. No obstante, la tendencia de los tiempos de mallado es similar a la de cualquier otra geometría.

5.2.1. Análisis de tiempos de mallado

Los mallados presentados en este apartado se han obtenido con un ordenador portátil común, concretamente un ASUS Intel Core i7 – 740QM a 1,73 GHz con 8 GB de RAM.

En primer lugar, se ha hecho un barrido con el número de elementos a generar sin utilizar el mallado multinivel. Así, el lado de los elementos generados varía desde 3 cms., para el que se obtienen 1.089 cuadrados, hasta 1 mm., en una malla de 1 millón de elementos. Las medidas de los tiempos de mallado frente al número de elementos se han representado con ejes logarítmicos en la Figura 5.1, siendo la curva de color rojo la del mallado tradicional. Con esta representación, se observa una tendencia lineal del tiempo requerido frente al número de

elementos. En vista de los resultados, parece poco recomendable generar más de 40.000 elementos en una misma superficie, para los que ya son necesarios casi 2 minutos, y totalmente inviable generar 1 millón de elementos, requiriendo más de 8 horas.

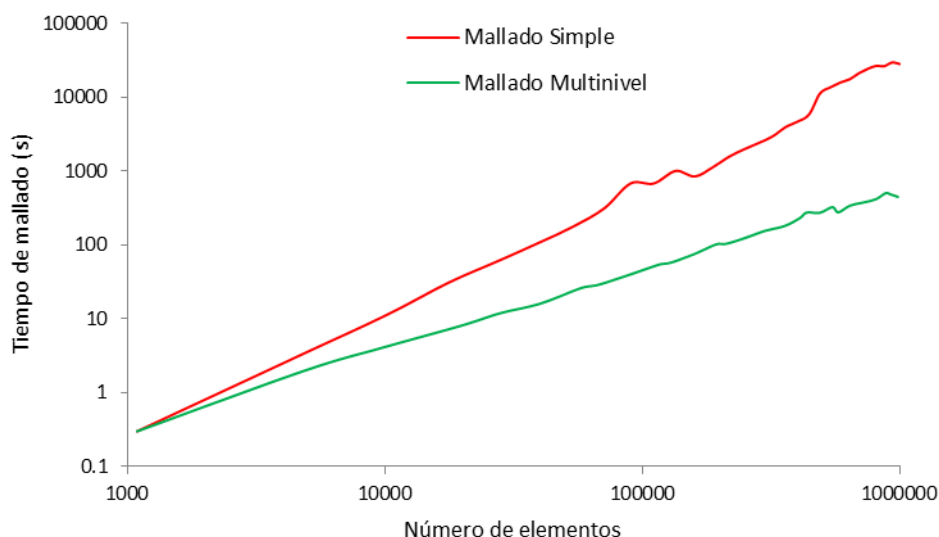


Figura 5.1: Tiempos de mallado de la placa cuadrada.

Para tratar de solucionar el cuello de botella encontrado, se implementa el modo multinivel, con la finalidad de controlar que no se dispare el número de elementos a generar para cada superficie que compone la geometría de entrada a cada nivel. Al repetir el análisis con el mallado multinivel, las medidas de tiempos en color verde de la Figura 5.1 muestran un comportamiento similar al anterior con respecto al número de elementos, pero la pendiente de la curva ahora es menor, lo que se traduce en una escala de tiempos bastante más pequeña. En este caso, el tiempo mínimo coincide con el del mallado simple, pero el máximo ahora está en torno a 8 minutos, lo que demuestra la importancia de controlar el número de elementos a generar en cada superficie.

Para cuantificar la eficiencia del modo multinivel a medida que aumenta el número de elementos finales de la malla, en la Figura 5.2 se ha representado la relación entre los tiempos obtenidos con multinivel y los del algoritmo de mallado original simple. En esta curva, se observa que el modo multinivel se hace más útil cuanto más lento es el mallado tradicional, lo que hace necesario controlar adecuadamente la relación entre el número de niveles a emplear y el número de elementos a generar en cada superficie de cada nivel.

En todos los ejemplos que se muestran en este capítulo, se ha realizado el mallado en uno o dos niveles, ya que el uso de más niveles conlleva pérdidas de tiempo en las etapas de preprocesado que deterioran la eficiencia. Además, aunque la gestión de memoria de la

geometría a malla cuando esta es una malla está optimizada para emplear tantos niveles como sea necesario, con las pruebas realizadas, los resultados óptimos se consiguen con solo dos niveles. Esto se debe a que hay algunos parámetros que no se pueden recalcular continuamente, como las topologías entre superficies, que hacen que la memoria y los tiempos de preprocesado crezcan notablemente cuando se tienen demasiadas superficies de entrada.

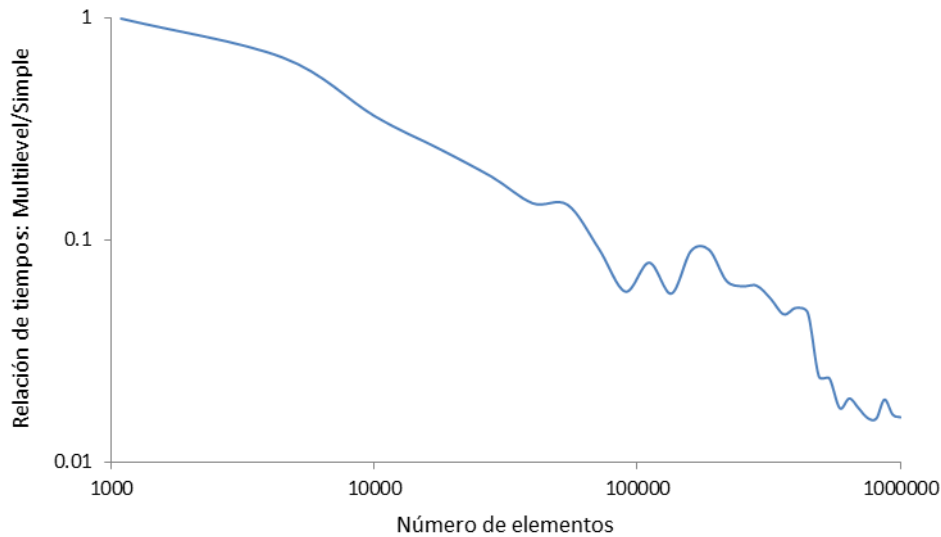


Figura 5.2: Relación de tiempos de mallado en la placa cuadrada.

5.3. AEROGENERADOR

La otra técnica implementada para optimizar la velocidad y consumo de recursos del mallador ha sido la paralelización de la herramienta.

Como se explicó en el *Capítulo 4*, las superficies que componen la geometría a malla se distribuyen según su tamaño entre los procesadores a utilizar, pero la relación entre el tiempo de mallado y el número de procesadores no siempre es una proporción directa, especialmente en las geometrías compuestas por superficies muy grandes y otras muy pequeñas.

Por ejemplo, el caso de la placa cuadrada analizada anteriormente no es apropiado para repetirlo con varios procesadores sin multinivel, ya que al haber una única superficie de entrada, solo trabajaría un procesador y el resto se mantendrían en espera. Sin embargo, al usar el modo multinivel se tendría un primer nivel en que ocurriría lo mismo, pero durante

muy poco tiempo, momento en el que entraría la malla resultante como nueva entrada y todos los procesadores tomarían su parte correspondiente para mallar de forma distribuida.

Para ver la influencia del número de procesadores en una geometría válida real, se ha tomado como caso de prueba, un aerogenerador compuesto por 244 superficies de muy distintos tamaños, sumando un área total de 1.465 m^2 . El lado deseado de los elementos es de 6 cm., teniendo finalmente una malla compuesta por 441.409 elementos. La Figura 5.3 muestra la geometría original del aerogenerador en la parte izquierda, donde se pueden diferenciar las superficies que lo componen; y en la parte derecha se ha hecho zoom sobre la zona más compleja de la malla de salida para poder apreciar sus detalles. La misma malla se ha obtenido variando el número de procesadores empleados, consiguiendo idénticos resultados pero con diferentes tiempos de mallado, como se muestra en la siguiente sección.

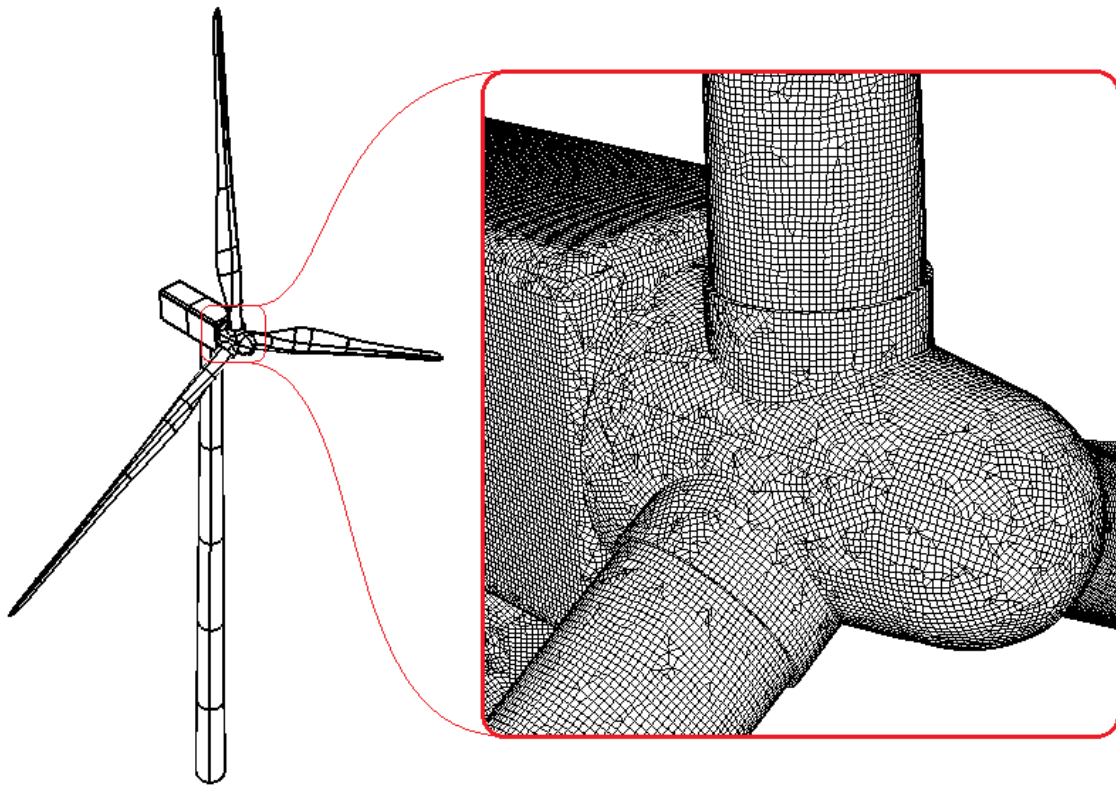


Figura 5.3: Aerogenerador original y parte mallada.

5.3.1. Análisis de tiempos de mallado

Para mallar el aerogenerador con un número suficientemente grande de procesadores, se ha utilizado una máquina SUN X4000 Quad Opteron de 32 núcleos a 2,4 GHz, con 256 GB de RAM.

Variando el número de procesadores para medir los tiempos necesarios de mallado, se observa una curva de tiempos similar a una exponencial decreciente, como se muestra en la Figura 5.4. Este resultado parece razonable, ya que a pesar de trabajar en paralelo, sigue habiendo partes no paralelizadas en el programa que son comunes a todos los procesadores, requiriendo un tiempo mínimo constante. No obstante, la reducción de tiempos conseguida es significativa, pasando de casi 50 minutos con un procesador a 2 minutos con 32 procesadores, aunque se obtienen tiempos similares a partir de 14 procesadores.

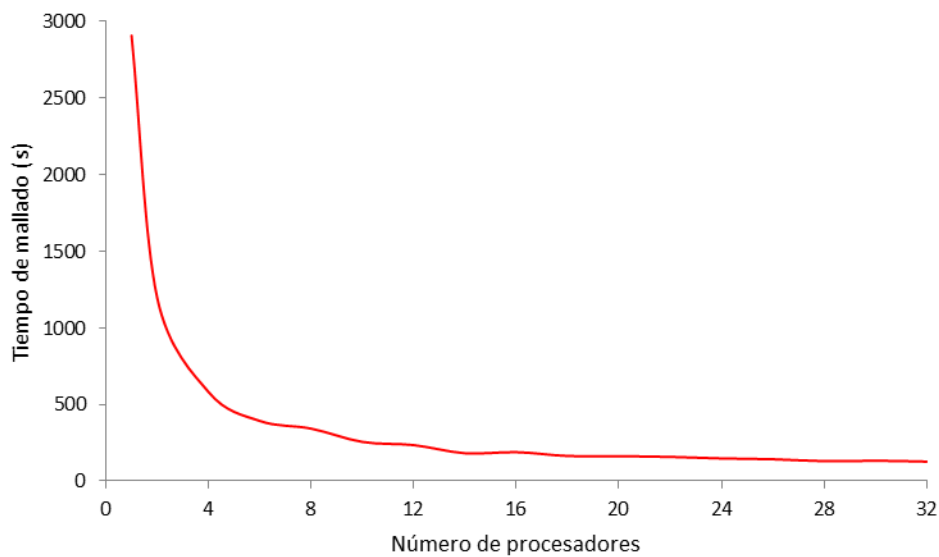


Figura 5.4: Tiempos de mallado frente al número de procesadores en el aerogenerador.

5.4. CONO ESFERA TRUNCADA

El siguiente paso es comprobar que los resultados de simular las mallas generadas son válidos. Para ello, se analiza el mallado obtenido de un cono truncado con una esfera con el algoritmo desarrollado y con otros malladores comerciales de referencia. El objetivo es simular las diferentes mallas bajo las mismas condiciones con el núcleo del Método de los Momentos (MoM) que contiene la herramienta NewFasant [1].

5.4.1. Mallados

Las dos herramientas de mallado comerciales empleadas son GiD [3] y CUBIT [4]. Es difícil comparar visualmente las mallas obtenidas, por lo que se presentan únicamente las del mallador implementado.

Como se ha hecho en el caso anterior, en la parte izquierda de la Figura 5.5 se muestra la geometría original del cono suavizado con la esfera en el extremo superior, compuesto de 8 superficies. Esta geometría tiene una diferencia considerable de tamaños entre las superficies grandes y las pequeñas. En la parte derecha de la figura se ha ampliado una parte de la malla para visualizar con claridad los detalles del mallado, estando la malla total compuesta aproximadamente de 85.000 elementos.

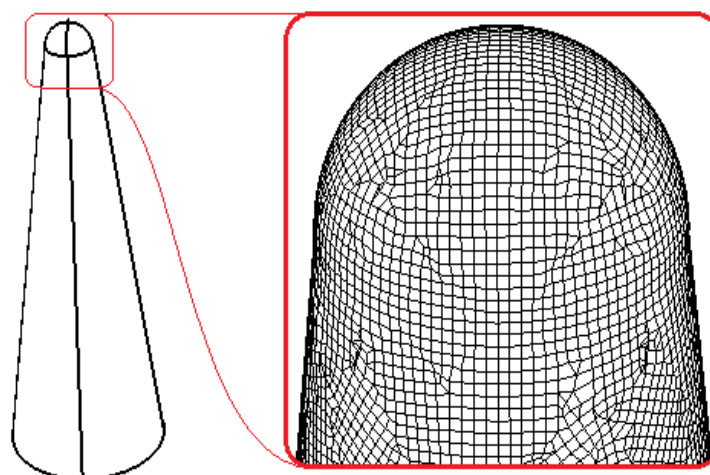


Figura 5.5: Cono truncado con una esfera y detalles de la malla.

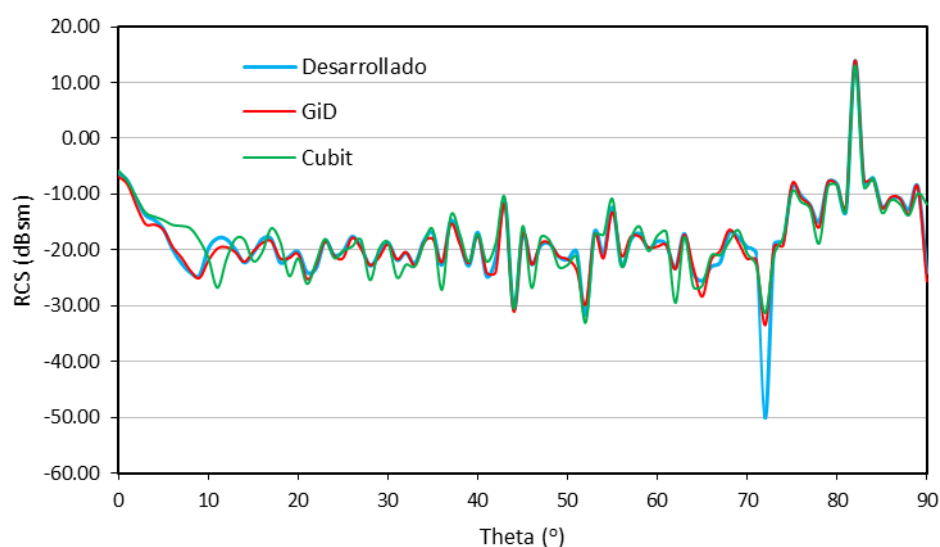


Figura 5.6: Corte en $\phi=0^\circ$ de la RCS del cono suavizado con la esfera.

5.4.2. Verificación de la malla

Se ha calculado la RCS¹ mono-estática de la estructura del cono truncado a 10 GHz., usando para ello polarización horizontal. En la Figura 5.6 se representan los resultados de la

¹ Radar Cross Section o Sección Radar.

RCS en $\phi=0^\circ$ y θ variando de 0° a 90° de las diferentes mallas. Como se trata de un caso sencillo con una resolución de elementos en la malla lo suficientemente alta, todas las mallas proporcionan resultados muy parecidos, excepto en algunas zonas aisladas en las que las diferencias en la distribución de los elementos hacen que las curvas cambien ligeramente. [5]

5.5. CONO ESFERA CON RANURA

Otro caso en el que se han comparado los resultados de simular mallas procedentes de diferentes herramientas, es el de una cono-esfera que contiene una pequeña ranura en la zona de unión de las dos formas canónicas. De nuevo, se ha utilizado el núcleo del MoM de la herramienta NewFasant para simular, analizando ahora dos frecuencias diferentes. [6]

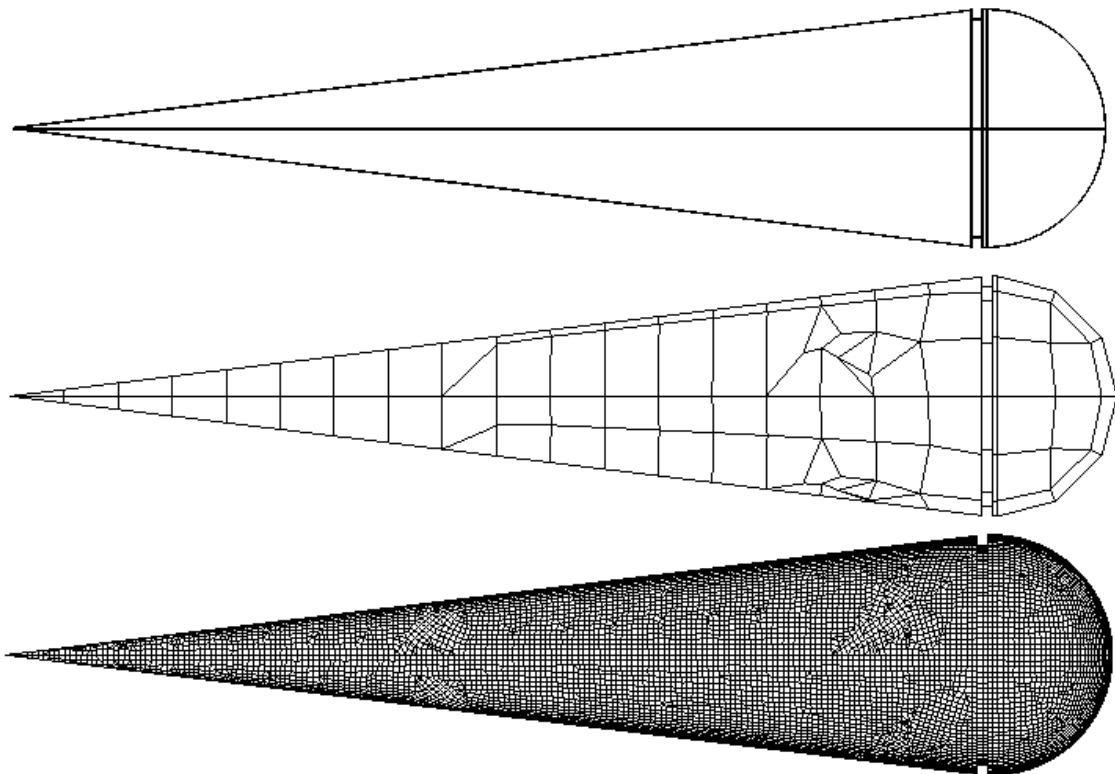


Figura 5.7: Cono esfera con ranura original y mallados con distinta resolución de elementos.

5.5.1. Mallados

Los malladores de referencia siguen siendo GiD y CUBIT, aunque se han mostrado únicamente las mallas de la herramienta desarrollada en la Figura 5.7. En la parte superior de la imagen, se representa la geometría original de entrada, compuesta por 4 superficies muy grandes, 4 de tamaño medio, y 16 muy pequeñas en la región de la ranura. Las dos frecuencias

a las que se ha analizado este caso están bastante alejadas, teniendo una frecuencia baja con una densidad muy pequeña de elementos en la parte central de la figura; y una frecuencia mayor en la que se consigue una alta densidad de elementos, cuyo lado es menor que la anchura de la ranura, en la parte inferior de la figura.

5.5.2. Verificación de la malla

La estructura se ha simulado alimentándola con polarizaciones vertical y horizontal, obteniendo así la RCS por componentes en $\theta=90^\circ$, y con ϕ variando de 0 a 180° . [7]

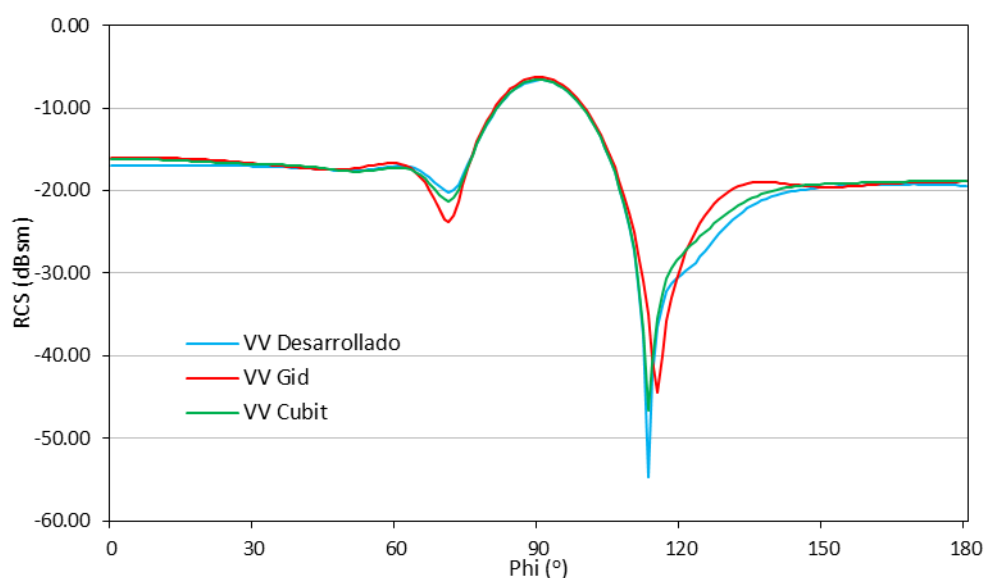


Figura 5.8: Corte en $\theta=90^\circ$ de la RCS con polarización vertical a 869 MHz en la cono esfera.

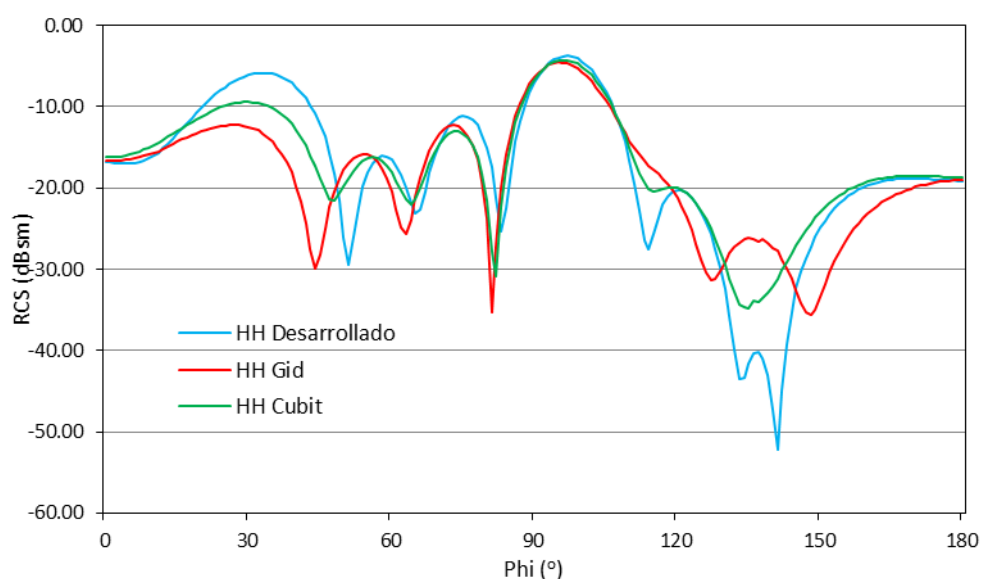


Figura 5.9: Corte en $\theta=90^\circ$ de la RCS con polarización horizontal a 869 MHz en la cono esfera.

En el primer caso analizado, la frecuencia es de 869 MHz., para la que tan solo se han obtenido 220 elementos en la malla. La longitud de onda de análisis no se adapta correctamente a las dimensiones eléctricas de la estructura, por lo que los resultados varían ligeramente entre las diferentes mallas. Para el caso de la polarización vertical, las tres curvas de RCS representadas en la Figura 5.8 se aproximan mucho. Sin embargo, la polarización horizontal presenta mayores diferencias, tal y como se muestra en la Figura 5.9, debido a las irregularidades que aparecen en torno a la ranura por el desacoplo entre su anchura y el tamaño de los elementos, que hacen que aparezcan elementos irregulares.

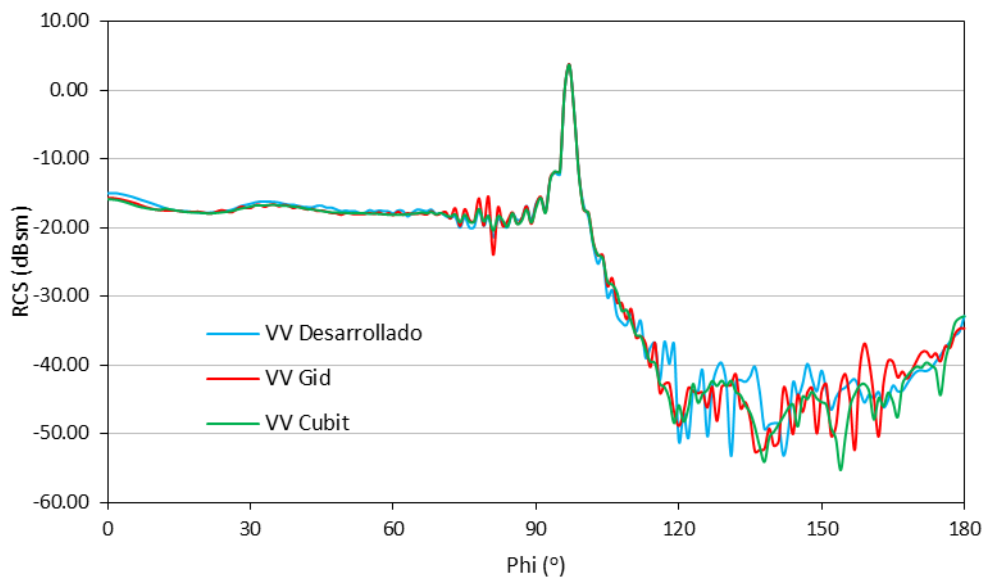


Figura 5.10: Corte en $\theta=90^\circ$ de la RCS con polarización vertical a 9 GHz en la cono esfera.

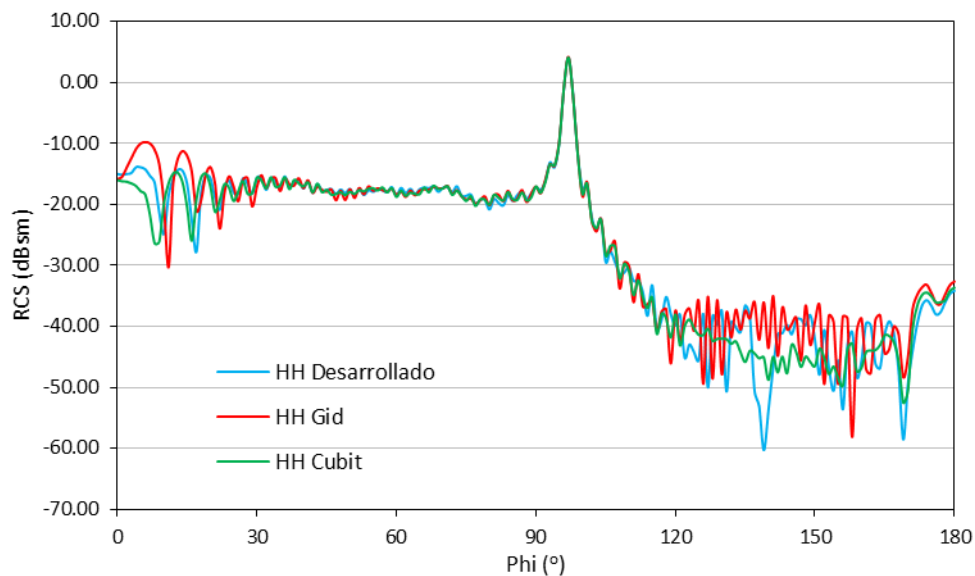


Figura 5.11: Corte en $\theta=90^\circ$ de la RCS con polarización horizontal a 9 GHz en la cono esfera.

Al incrementar la frecuencia a 9 GHz., se obtiene una malla de unos 17.000 elementos. Ahora, la longitud de onda de análisis se adapta correctamente a las dimensiones eléctricas de

la estructura, representando con precisión todos los detalles de la misma. Las curvas de RCS de los distintos malladores con polarización vertical y horizontal, representadas respectivamente en la Figura 5.10 y en la Figura 5.11, se aproximan bastante. Únicamente se observan pequeñas diferencias en la polarización horizontal en las zonas próximas al vértice del cono y a la ranura, debidas a la diferencia de la distribución de elementos en esas partes de la geometría.

5.6. REFLECTOR CON BOCINA

De los casos anteriores, se deduce que las diferencias entre los distintos mallados, como por ejemplo en la distribución de los elementos, se traduce en pequeñas variaciones en los resultados obtenidos al simular. Teniendo esto en cuenta, y dando por validado el mallador desarrollado al compararlo con otras herramientas, conviene comprobar que los resultados también se mantienen al analizar las mallas generadas con el mallado simple o con el modo multinivel (o multilevel).

El primer caso para comparar es el reflector de la Figura 5.12, que tiene un diámetro de apertura de 5 m. y una distancia focal de 2,5 m., y que se alimenta con una bocina piramidal a 3 GHz. Es una geometría sencilla, compuesta por 4 superficies eléctricamente grandes que forman el reflector, y 9 superficies pequeñas en la bocina. Este modelado de la estructura hace que sea útil emplear el modo multinivel para descomponer las superficies del reflector en una colección de elementos de dimensiones similares a las superficies de la bocina, para finalmente mallar todo por igual.

La estructura ha sido mallada y simulada con el MoM de NewFasant, usando 8 procesadores, en un equipo SUN 2 QUAD Core Intel Xeon a 2,27 GHz. con 12 GB de RAM.

5.6.1. Mallados

En la Tabla 5.1 se muestra el tiempo requerido para mallar la geometría, así como el número de elementos generados usando y sin usar el modo multinivel. La malla está compuesta por superficies en las que se generan suficientes elementos como para que el modo multinivel sea más adecuado que el simple, consiguiendo reducir el tiempo de mallado al 16 por ciento. La diferencia entre el número de elementos en la malla de las dos técnicas se debe a la discretización incremental del modo multinivel, que por lo general hace que se

generen menos elementos en la malla final que cuando se aplica el algoritmo de mallado directamente.

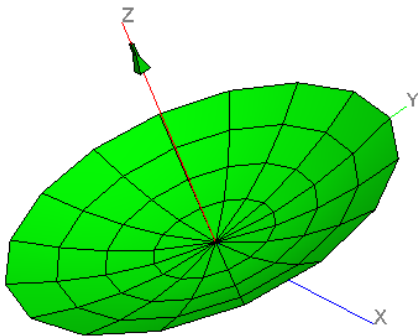


Figura 5.12: Reflector con bocina piramidal.

	Número de elementos	Tiempo de mallado (s)
Modo Multinivel	211.616	66
Modo Simple	233.866	431

Tabla 5.1: Datos del mallado del reflector con bocina.

5.6.2. Resultados

Los resultados obtenidos de las simulaciones son visualmente idénticos para las dos mallas, por lo que en esta sección se ha representado únicamente uno de ellos (los de la malla sin multinivel).

En la Figura 5.13, se representa la distribución de corrientes en la geometría, donde se observa la mayor contribución en la bocina de alimentación y una atenuación gradual en la superficie del reflector.

La Figura 5.14 muestra la forma del diagrama de radiación tridimensional de la estructura completa, que tiene el lóbulo principal de ganancia en la dirección positiva del eje Z.

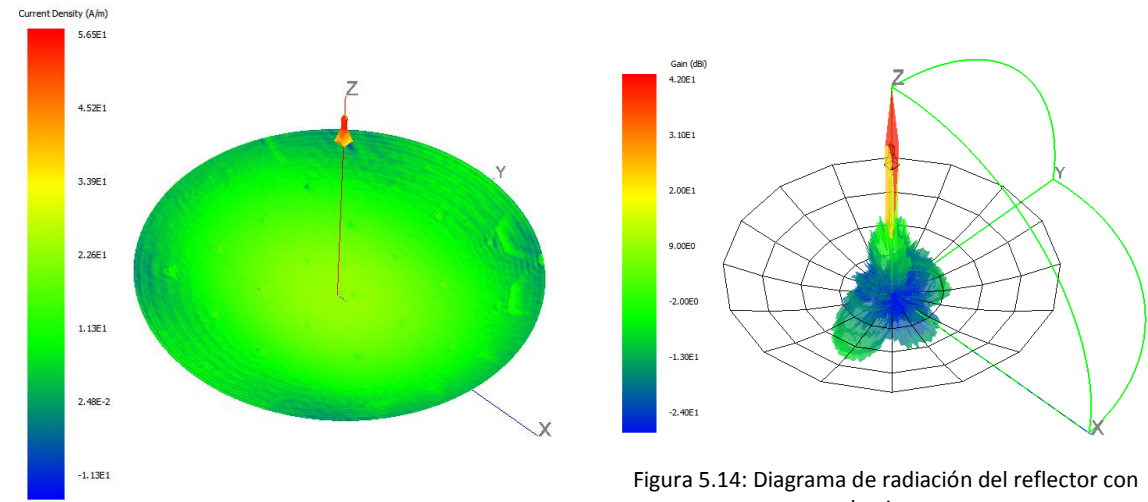


Figura 5.13: Densidad de corrientes en el reflector con bocina.

Figura 5.14: Diagrama de radiación del reflector con bocina.

Otra perspectiva de los resultados, se obtiene representando el campo eléctrico por componentes. Así, en la Figura 5.15 y la Figura 5.16, se muestran las componentes normalizadas respecto al máximo total, según ϕ y θ , respectivamente. En ambos casos ϕ varía en el eje X y θ en el eje Y.

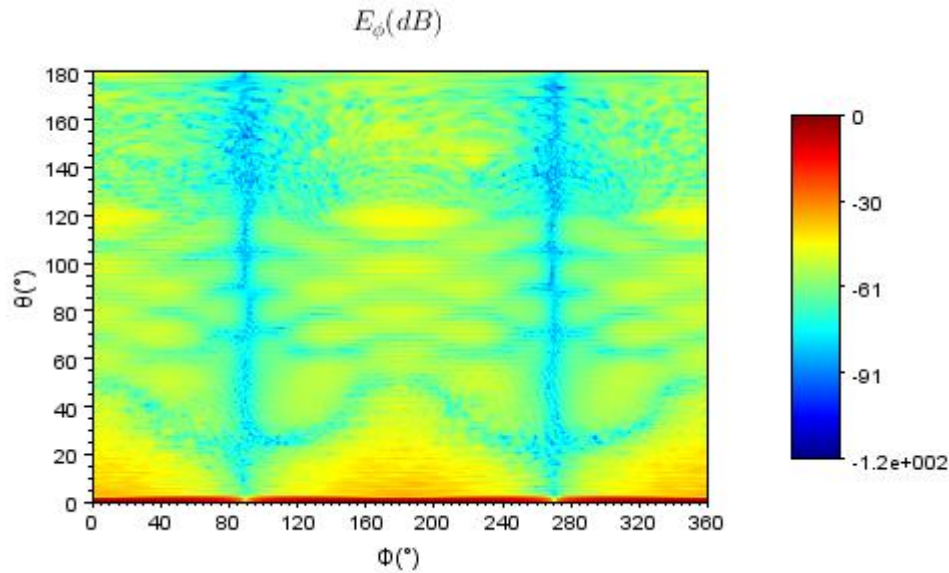


Figura 5.15: Diagrama de campo de E_ϕ del reflector con bocina.

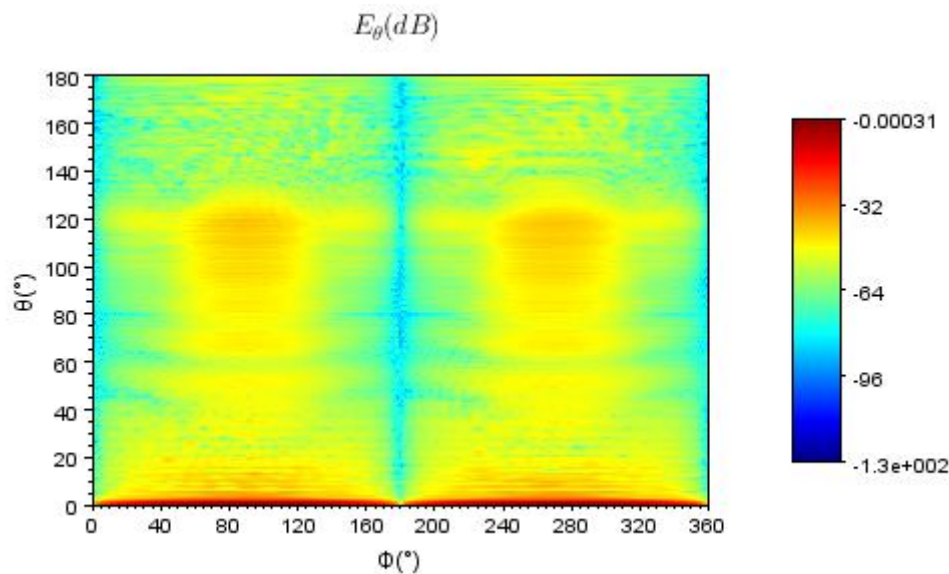


Figura 5.16: Diagrama de campo de E_θ del reflector con bocina.

5.6.3. Comparativa de resultados

Como ya se ha comentado anteriormente, en el diagrama de radiación y en los diagramas de campo anteriores se observa que la mayor contribución se encuentra sobre el eje Z positivo.

Para comparar los resultados de las dos mallas, se ha escogido una coordenada fija y otra variable. Por ejemplo, para el corte en $\phi=0^\circ$ y variando θ de 0 a 180° , se representa la ganancia del reflector en la Figura 5.17, observando que los resultados son prácticamente idénticos.

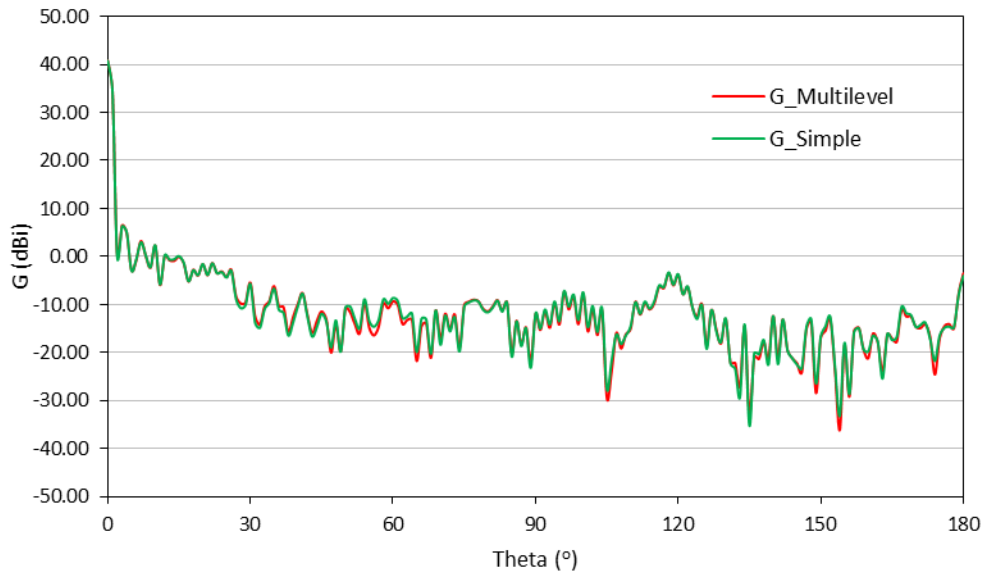


Figura 5.17: Corte en $\phi=0^\circ$ de la ganancia del reflector con bocina.

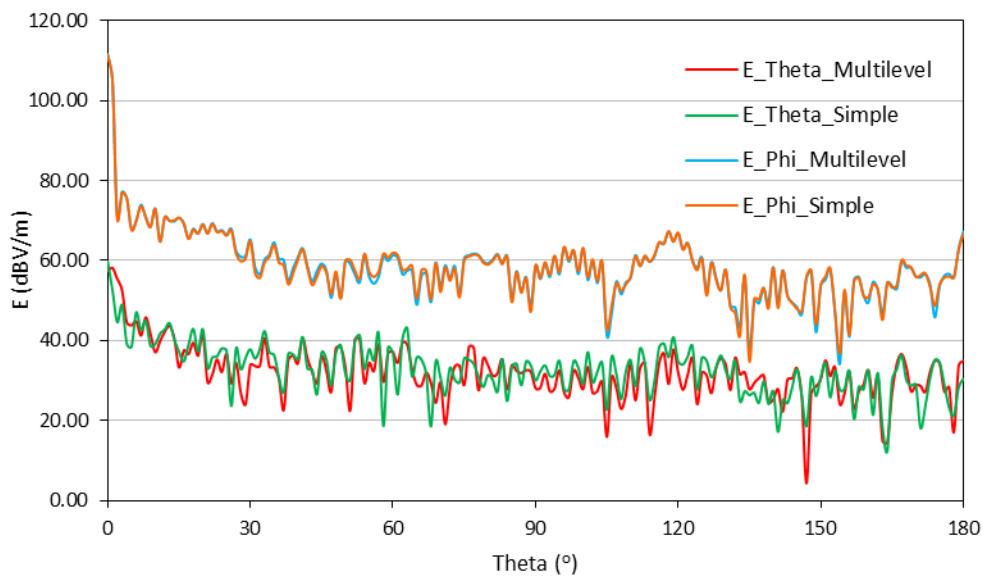


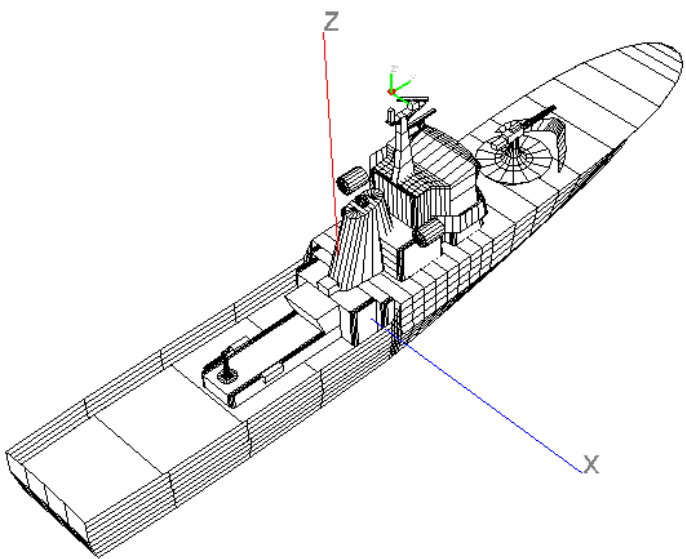
Figura 5.18: Corte en $\phi=0^\circ$ del campo eléctrico del reflector con bocina.

Analizando las componentes del campo eléctrico para el corte en $\phi=0^\circ$ representadas en la Figura 5.18, se observa que la componente según ϕ es la dominante, y por lo tanto es la que aporta la mayor contribución sobre la ganancia en este corte, siendo los resultados de las dos mallas casi idénticos. Es sobre la componente débil, según θ , donde se observan pequeñas diferencias entre las curvas de los dos mallados, ya que las mallas no son exactamente iguales en toda la geometría, y estas diferencias se resaltan en las componentes más bajas.

5.7. PATRULLERA

Un análisis similar se ha repetido con una geometría real más compleja, concretamente con la patrullera mostrada en la Figura 5.19. Se trata de un caso eléctricamente grande, con una longitud de 44 m., una anchura de 7 m., una altura de 12 m. (dimensiones de los extremos absolutos) y un área total útil de aproximadamente 950 m², cuya geometría está modelada con 229 superficies de muy diversas dimensiones. Sobre la estructura se ha colocado un dipolo eléctrico (coordenadas en metros: 0, 4, 11), representado en la figura con el pequeño sistema de coordenadas auxiliar de color verde. La frecuencia de análisis para este caso es 1 GHz.

La estructura ha sido mallada y simulada con el MoM usando 8 procesadores, en un equipo SUN 2 QUAD Core Intel Xeon a 2,27 GHz. con 12 GB de RAM.



	Número de elementos	Tiempo de mallado (s)
Modo Multinivel	268.889	58
Modo Simple	267.433	148

Tabla 5.2: Datos del mallado de la patrullera.

Figura 5.19: Patrullera.

5.7.1. Mallados

En la Tabla 5.2 se muestra el tiempo requerido para mallar la geometría y el número de elementos generados, usando y sin usar el modo multinivel. La heterogeneidad en formas y tamaños de las superficies que constituyen la geometría la hacen un caso adecuado para utilizar la técnica multinivel, consiguiendo una reducción de tiempo de mallado del 60 por ciento con respecto al mallado simple. Además, el número de elementos en ambas mallas es muy próximo, ya que en el primer mallado se consiguen áreas de salida bastante homogéneas.

5.7.2. Resultados

Los resultados representados en esta sección son solamente los que se corresponden a la malla obtenida con multinivel, ya que son visualmente idénticos para ambas mallas.

En la Figura 5.20 se muestra la distribución de corrientes en la geometría, donde se observa la mayor contribución en la zona más cercana al dipolo, y unos niveles gradualmente más bajos a medida que aumenta la distancia con respecto al mismo, teniendo las densidades de corriente más bajas en las zonas de sombra de la parte inferior de la estructura.

La Figura 5.21 muestra la forma del diagrama de radiación tridimensional de la estructura completa. Aunque resulta complicado visualizar con claridad los detalles del diagrama, se observa que la forma se asemeja a un dipolo ideal con el máximo de radiación en el plano $\theta=90^\circ$. La distribución irregular del diagrama se debe al efecto de los distintos elementos de la geometría, y en la parte inferior los niveles se minimizan por estar en la zona de sombra del elemento radiante.

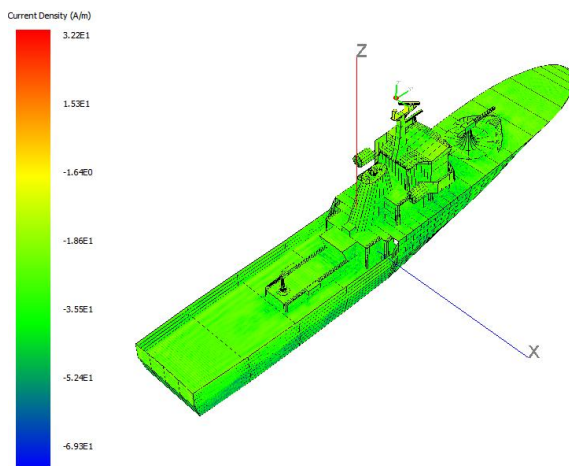


Figura 5.20: Densidad de corrientes en la patrullera.

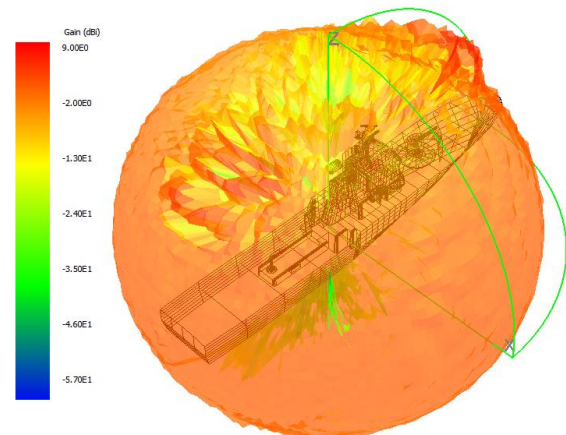
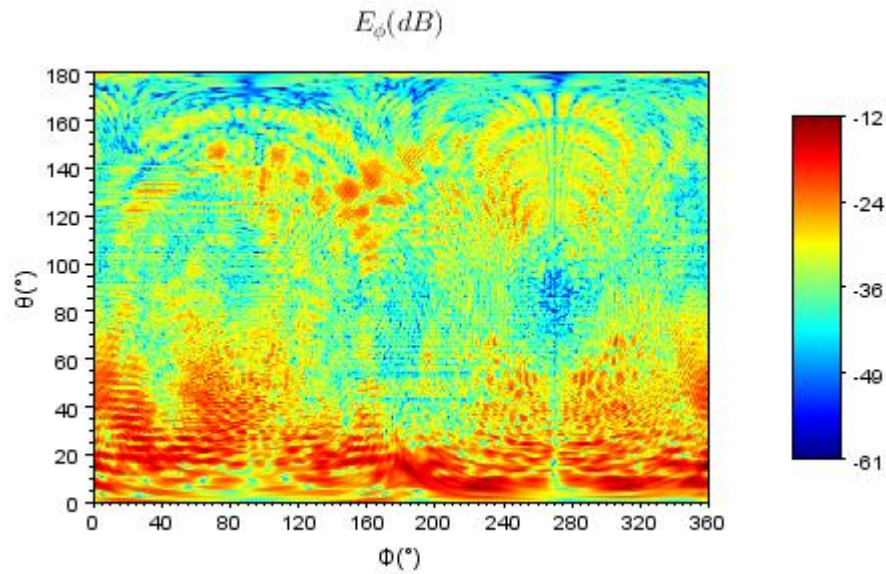
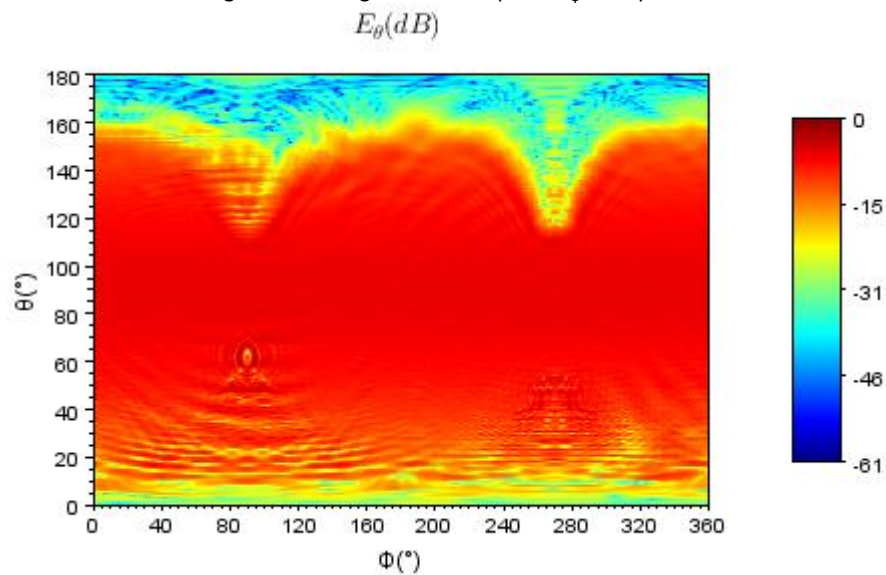


Figura 5.21: Diagrama de radiación de la patrullera.

Analizando los diagramas de campo eléctrico normalizado por componentes de la Figura 5.22 y la Figura 5.23, se identifican los patrones típicos del dipolo eléctrico orientado según el eje $\theta=0^\circ$, con la componente en ϕ despreciable y la componente principal en θ , maximizándose en $\theta=90^\circ$. La influencia de la estructura de la patrullera se aprecia en ambos diagramas, que resultan diferentes del patrón de radiación ideal del dipolo. Así pues, la componente E_ϕ de la Figura 5.22 tiene pequeñas contribuciones debidas a la interacción con la patrullera, y en la componente del campo eléctrico E_θ representada en la Figura 5.23, es posible identificar la forma alargada de la estructura con los mínimos que aparecen sobre los cortes $\phi=90^\circ$ y $\phi=270^\circ$.

Figura 5.22: Diagrama de campo de E_ϕ de la patrullera.Figura 5.23: Diagrama de campo de E_θ de la patrullera.

5.7.3. Comparativa de resultados

Los resultados procedentes de las mallas obtenidas con el algoritmo sencillo y con el método multinivel son prácticamente idénticos en este caso, con una similitud mayor que la obtenida en el reflector por las características de la geometría y el modelado de la misma.

Si se comparan las componentes (sin normalizar) del campo eléctrico para un corte en ϕ , como el de $\phi=0^\circ$ representado en la Figura 5.24, se verifica que son prácticamente idénticas en todo el barrido, por lo que los mismos resultados se trasladan a la ganancia, que no se ha representado en este caso. En esta representación, también es posible identificar la influencia de la estructura tomando como referencia las curvas ideales de un dipolo eléctrico aislado.

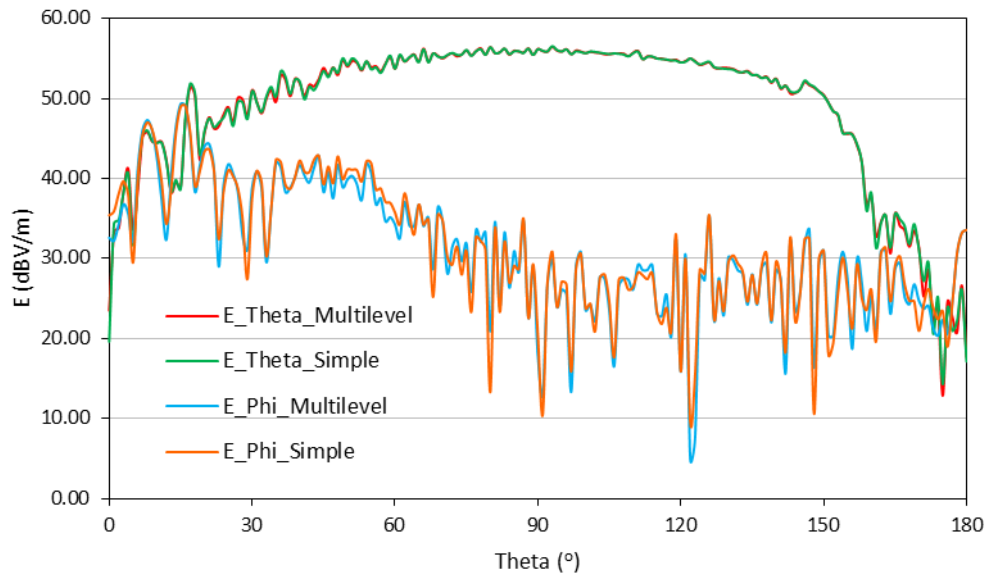


Figura 5.24: Corte en $\phi=0^\circ$ del campo eléctrico de la patrullera.

5.8. AVIONETA

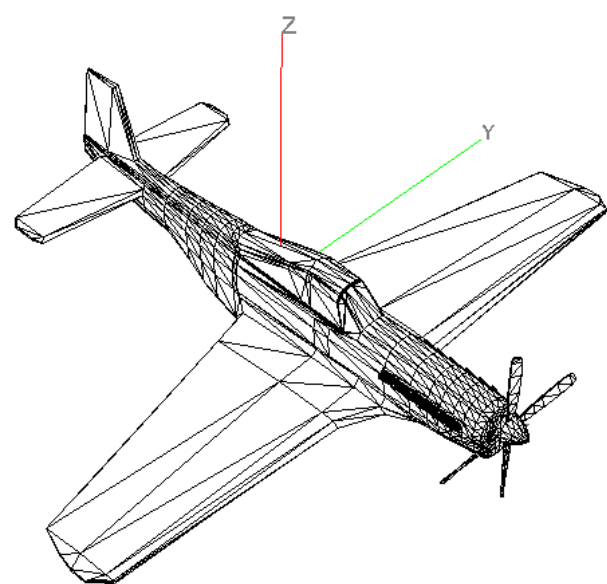
En esta sección se presenta un análisis similar a los anteriores, aunque con ciertas diferencias. Se trata de una avioneta eléctricamente grande y compleja, con una longitud de 14 m., una anchura de 17 m., una altura de 4,5 m. (dimensiones de los extremos absolutos) y un área total útil de aproximadamente 200 m^2 . La primera diferencia radica en el modelado de la geometría, mostrada en la Figura 5.25, ya que se trata de una malla de 3.000 superficies triangulares planas de diferentes tamaños. La otra diferencia es el tipo de simulación, ya que se ha calculado la RCS biestática con el MoM, a la frecuencia de 2 GHz., y con la dirección de incidencia de $\phi=0^\circ$ y $\theta=0^\circ$.

La estructura ha sido mallada y simulada con el MoM usando 8 procesadores, en un equipo SUN 2 QUAD Core Intel Xeon a 2,27 GHz. con 12 GB de RAM.

5.8.1. Mallados

En la Tabla 5.3, se muestra el tiempo requerido para mallar la geometría junto al número de elementos generados, usando y sin usar el modo multinivel. Aunque la geometría está compuesta únicamente por triángulos planos, la diversidad de sus tamaños, ángulos o lados, potencia la eficiencia de la técnica multinivel, consiguiendo una reducción del 70 por ciento del tiempo con respecto al mallado simple. Por lo general, al mallar una superficie triangular con muchos elementos, se consiguen menos elementos con el mallado directo que

con el multinivel. Esto ocurre porque los primeros niveles del mallado multinivel generan más triángulos pequeños que posteriormente requieren de más elementos con el tamaño final deseado. Como consecuencia, en este caso la malla del método directo tiene menos elementos que la del mallado multinivel.



	Número de elementos	Tiempo de mallado (s)
Modo Multinivel	252.568	36
Modo Simple	231.415	124

Tabla 5.3: Datos del mallado de la avioneta.

Figura 5.25: Avioneta.

5.8.2. Resultados

Tanto los resultados de la densidad de corriente como el diagrama de radiación son visualmente idénticos para ambas mallas, de modo que solamente se muestran los correspondientes al mallado multinivel.

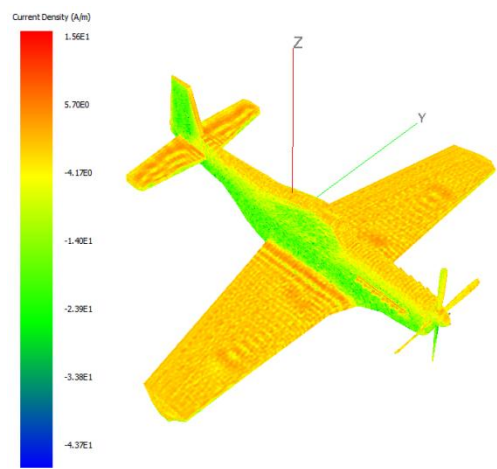


Figura 5.26: Densidad de corrientes en la avioneta.

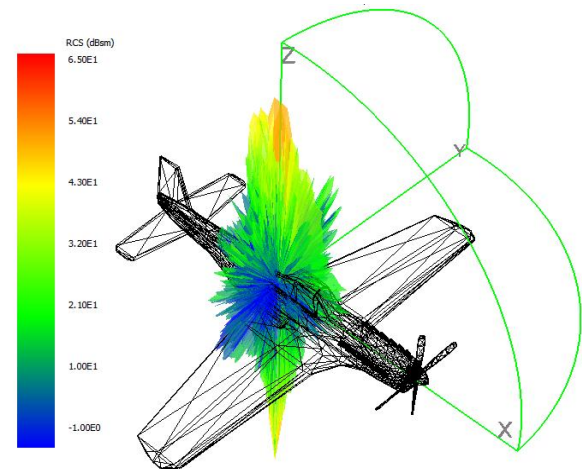


Figura 5.27: Diagrama de radiación RCS de la avioneta.

En la densidad de corrientes sobre la estructura representada en la Figura 5.26, se observa que las mayores contribuciones se encuentran en las regiones iluminadas directamente desde arriba, aunque por abajo los resultados son similares. Esto se traduce en un diagrama RCS 3D concentrado en el eje de Z del sistema cartesiano, como se representa en la Figura 5.27.

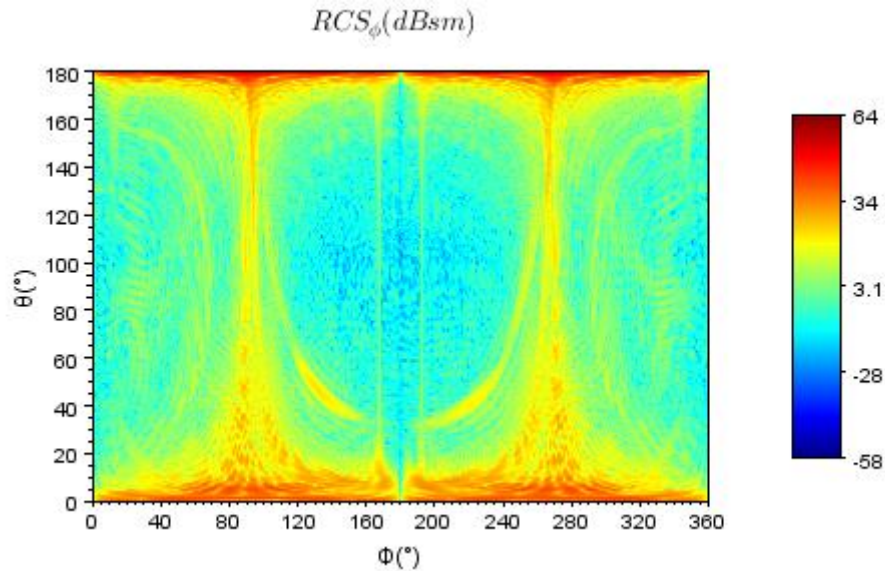


Figura 5.28: Diagrama de campo de E_ϕ de la avioneta.

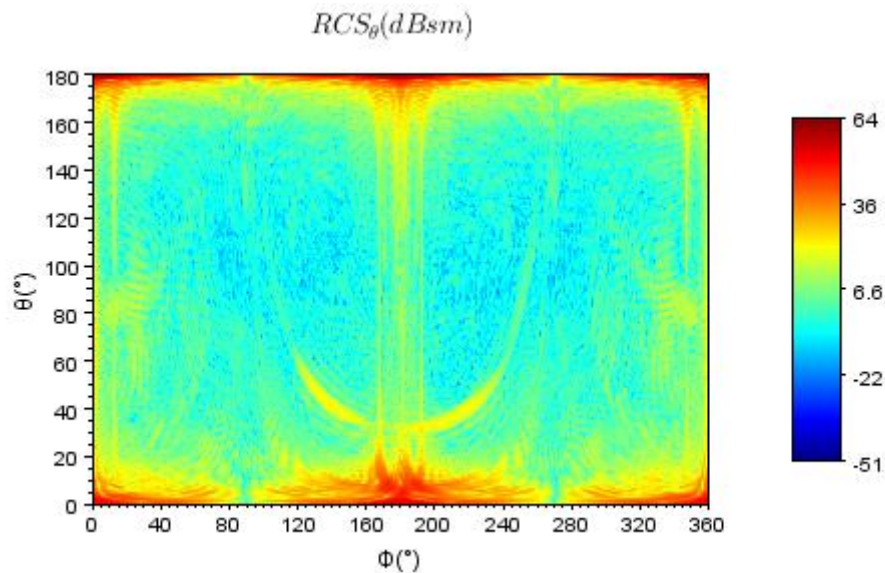


Figura 5.29: Diagrama de campo de E_θ de la avioneta.

Analizando el diagrama de la componente de RCS en phi de la Figura 5.28, se aprecian los mayores niveles de campo sobre el corte $\theta=180^\circ$ y ligeramente inferiores en $\theta=0^\circ$, es decir, sobre el eje Z. Además, esta componente presenta también altos niveles próximos al eje Y, y mínimos, por el contrario, cerca del eje X. El diagrama de la componente de RCS en theta representado en la Figura 5.29 tiene características similares que la componente en phi, con

los máximos sobre el eje Z; pero con las principales diferencias de que se han perdido los lóbulos secundarios sobre el eje Y, y hay pequeños lóbulos en el eje X.

5.8.3. Comparativa de resultados

Los resultados procedentes de la malla obtenida con el algoritmo sencillo y con el método multinivel son casi idénticos, al igual que ya ocurría en los casos previos.

Tomando como ejemplo un corte de la RCS en $\phi=0^\circ$, en la Figura 5.30 se comparan las componentes de la RCS obtenidas. La componente RCS_θ es la principal y las curvas de los dos mallados coinciden. En cambio, aparecen ciertas diferencias en la componente RCS_ϕ , de nuevo debidas a las diferencias de los mallados que se resaltan en las componentes débiles, pero precisamente debido a sus bajos niveles apenas influyen en los resultados de la RCS total.

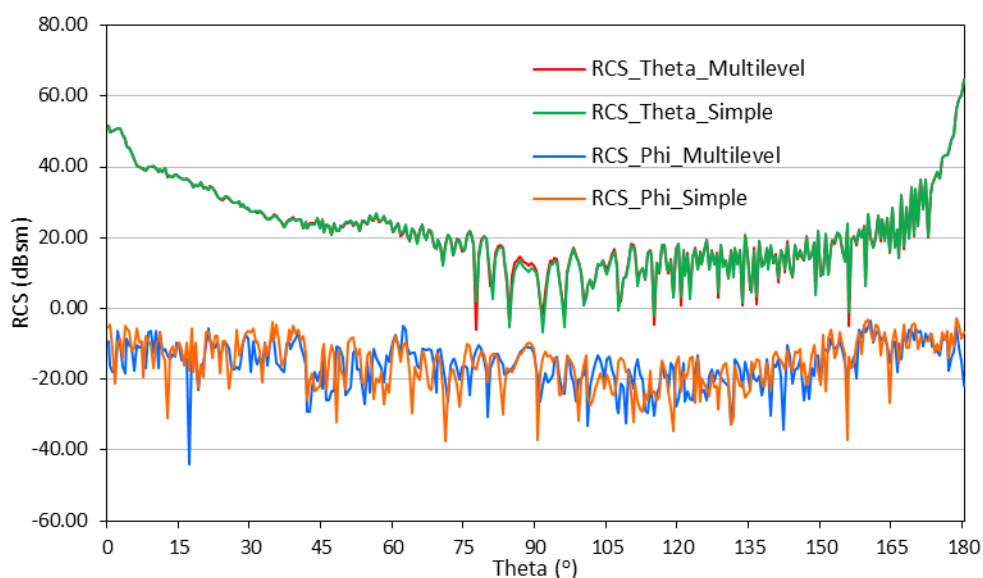


Figura 5.30: Corte en $\phi=0^\circ$ de la RCS de la avioneta.

5.9. ESFERA

En esta sección, se pretende mostrar la influencia de los parámetros de configuración de mallado en el análisis de RCS con PO^2 . Para ello, se toma el caso simple de una esfera de 0,5 m. de radio, sobre la que se ha calculado la RCS biestática a la frecuencia de 6 GHz., con la dirección de incidencia de $\phi=0^\circ$ y $\theta=0^\circ$. La esfera, representada en la Figura 5.31, está compuesta por 8 sectores que describen una curvatura máxima de 90° cada uno, por lo que el

² Physical Optics u Óptica Física.

único parámetro de configuración de interés es el que se denotó en el *Capítulo 2* como $factor_{curvatura}$.

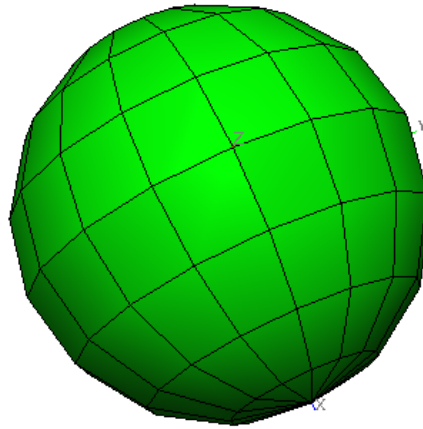


Figura 5.31: Geometría de la esfera.

5.9.1. Mallados obtenidos

Para comparar la influencia del parámetro $factor_{curvatura}$ en el criterio de mallado aplicado a PO, se han tomado dos valores diferentes para mallar la esfera. Si se toma $factor_{curvatura} = 0,1$, se obtiene la malla representada en la Figura 5.32, compuesta por 104 elementos. Sin embargo, si se reduce a un valor de $factor_{curvatura} = 0,01$, se obtiene la malla representada en la Figura 5.33, compuesta por 4.904 elementos. En ambos casos, las mallas están compuestas por triángulos planos, por lo que se discretizan las curvaturas de la geometría original con más o menos detalle, según disminuye o aumenta el factor de curvatura, respectivamente.

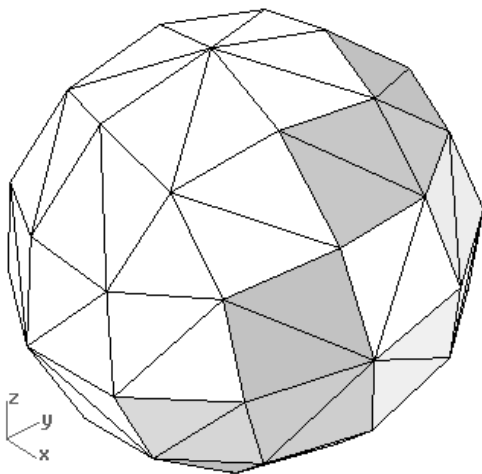


Figura 5.32: Malla de la esfera con $factor_{curvatura}=0,1$.

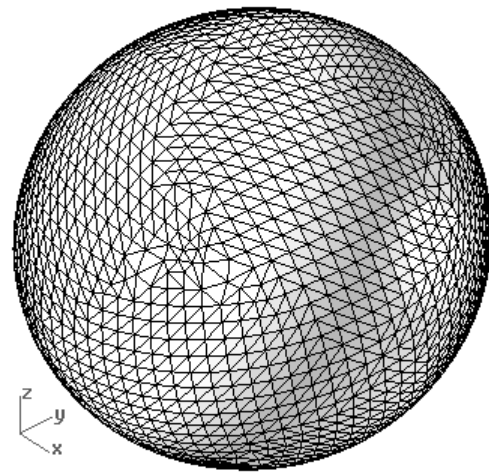


Figura 5.33: Malla de la esfera con $factor_{curvatura}=0,01$.

5.9.2. Comparativa de resultados

Analizando las componentes vertical y horizontal total de la RCS, representadas en la Figura 5.34 y Figura 5.35, respectivamente, se observa que aunque los valores máximos de las curvas coinciden en ambos casos, cuando el *factor de curvatura* es demasiado grande, se comete un error considerable en la discretización de la curvatura que hace que se pierdan detalles importantes en el cálculo de la RCS.

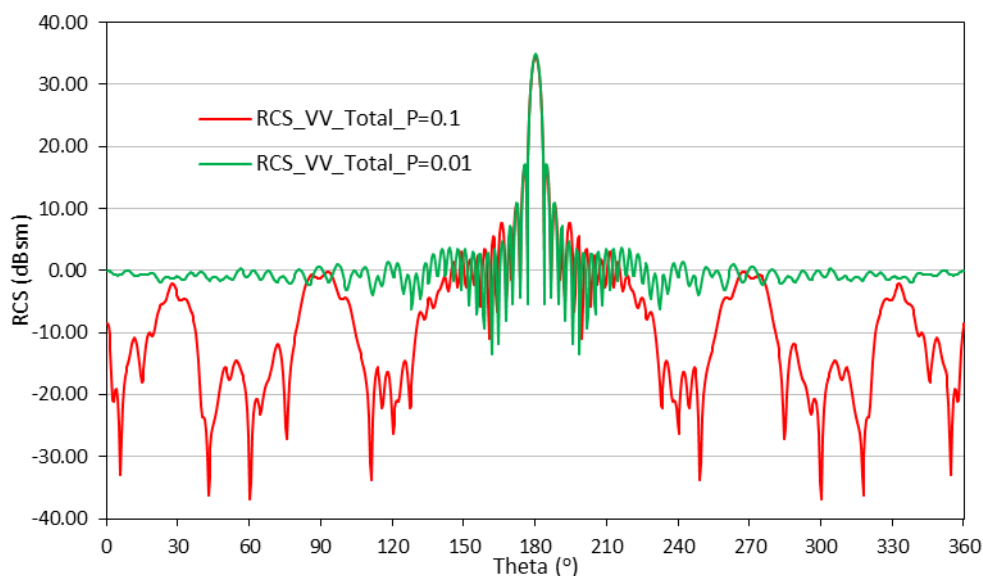


Figura 5.34: Corte en $\phi=0^\circ$ de la componente vertical total de la RCS de la esfera.

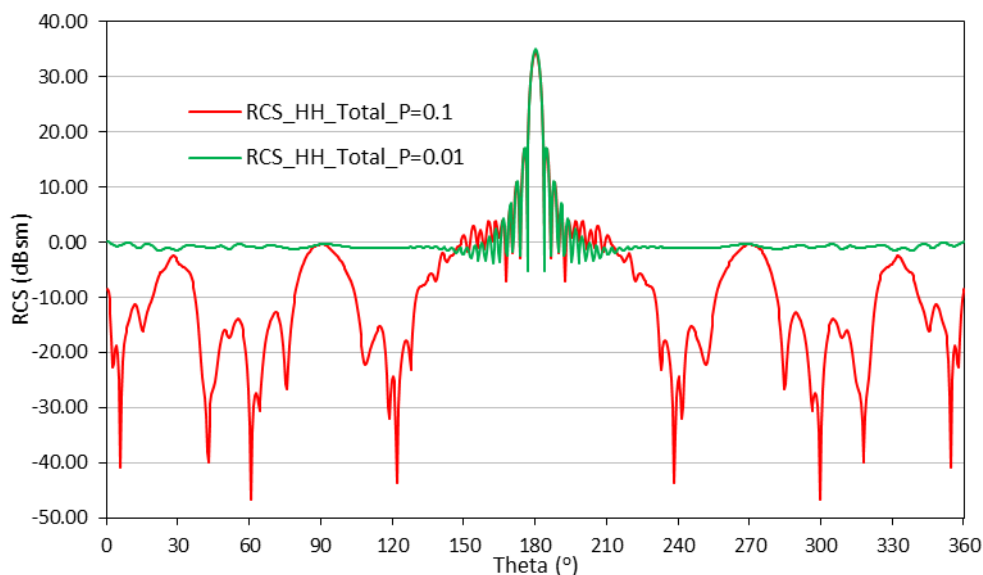


Figura 5.35: Corte en $\phi=0^\circ$ de la componente horizontal total de la RCS de la esfera.

5.10. FILTRO HAIRPIN

Otro aspecto a validar en el mallador desarrollado es el modelado del efecto borde en circuitos microstrip. Para ello, se toma como ejemplo un filtro Hairpin paso-banda, diseñado originalmente en el trabajo [8] con la herramienta ADS Momentum, de Agilent [9].

El filtro se ha modelado mediante superficies planas rectangulares y triangulares, tal y como se muestra en la Figura 5.36. En color rojo se resaltan los puertos, y aunque se trata de un diseño simétrico se denota al puerto izquierdo como el número 1 y al derecho como el 2.

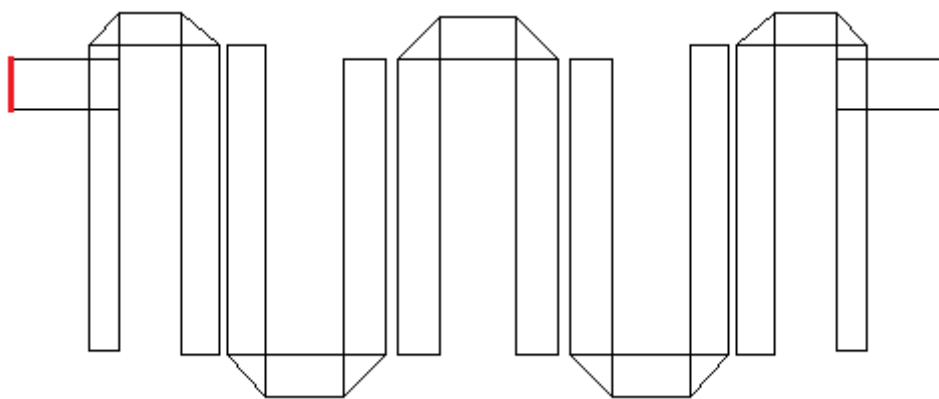


Figura 5.36: Filtro paso-banda.

Para mallarlo, empleando la notación del *Capítulo 4*, se escoge un factor de efecto borde en el mallado de $b=3$, usando 30 divisiones por longitud de onda para la frecuencia de 5 GHz. La malla resultante, compuesta de 214 elementos, se representa en la Figura 5.37, y se ha utilizado para simular un barrido en frecuencia que va de 3 a 5 GHz.

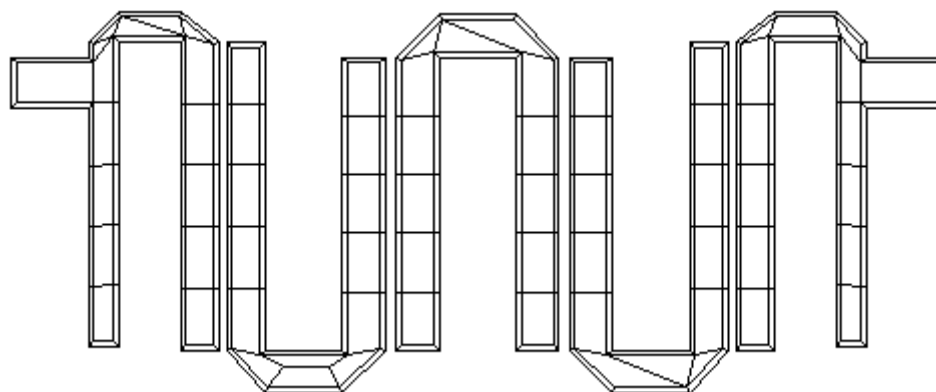


Figura 5.37: Mallado del filtro paso-banda.

En la Figura 5.38, se representan los parámetros S obtenidos tras simular el filtro. Estos resultados son aceptables y se han conseguido en apenas unos minutos.

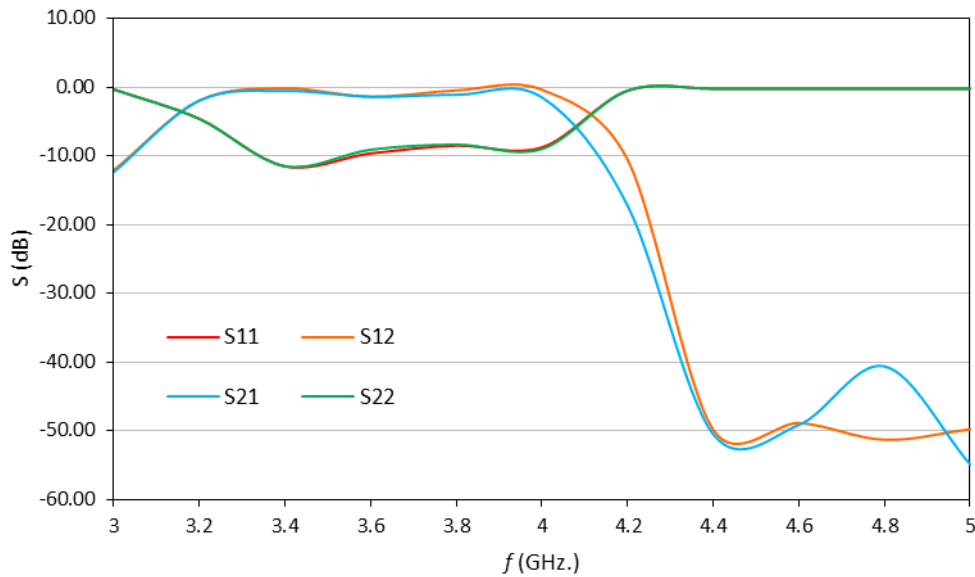


Figura 5.38: Parámetros S del filtro paso-banda.

Sin embargo, los resultados y la convergencia del núcleo de simulación con MoM se complican cuando no se usa el efecto de bordes. Por ejemplo, en la Figura 5.39 se muestran los parámetros S obtenidos al repetir la simulación usando un mallado sin bordes con 50 divisiones por longitud de onda para la frecuencia de 5 GHz. El tiempo de simulación en comparación con la malla anterior es aproximadamente igual, sin embargo se observa que los parámetros S son diferentes a los obtenidos anteriormente: los coeficientes de reflexión en la banda de paso son más bajos y se ha reducido el ancho de banda. Para obtener unos resultados más próximos a los de referencia, es necesario emplear aproximadamente 100 divisiones por longitud de onda, lo que hace que se dispare el número de elementos de la malla y consecuentemente, los tiempos de simulación.

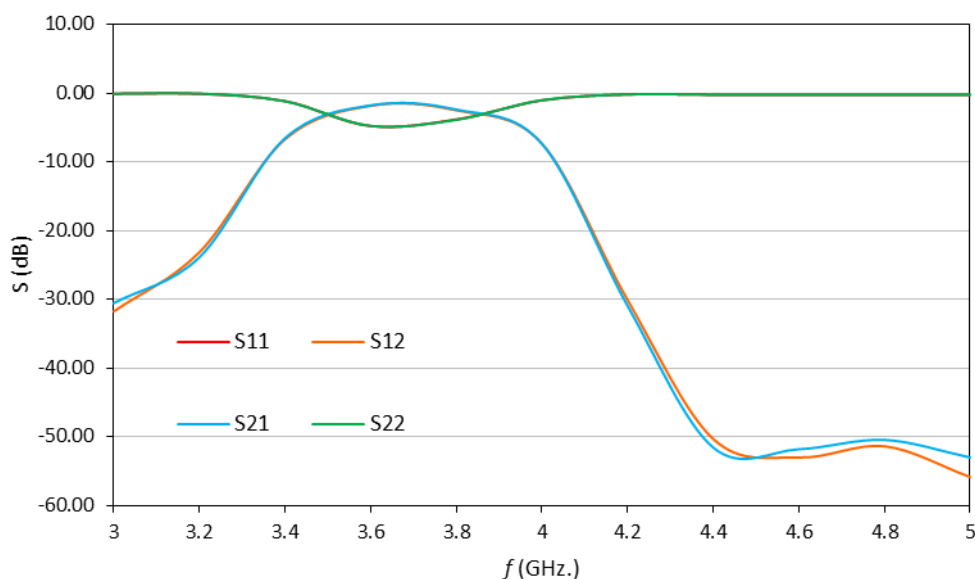


Figura 5.39: Parámetros S del filtro paso-banda sin bordes.

5.11. ANTENA DE HÉLICE CUADRIFILAR

Para comprobar que se genera correctamente la continuidad de antenas modeladas mediante tiras, se ha tomado como caso de prueba una antena de hélice cuadrifilar sencilla, colocada sobre un plano de masa sin continuidad eléctrica.

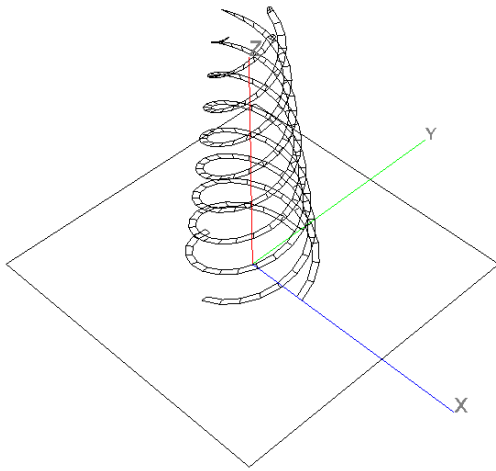


Figura 5.40: Hélice cuadrifilar.

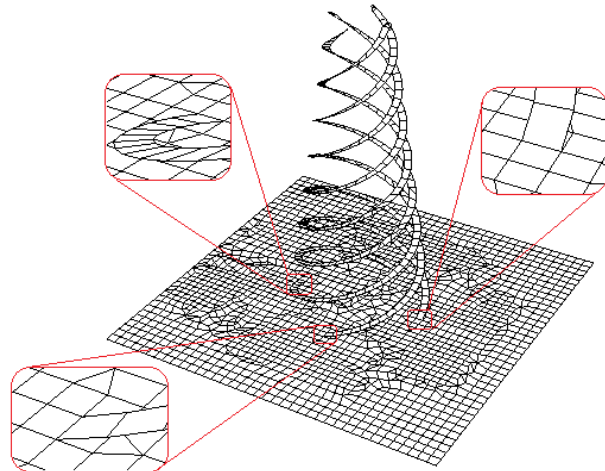


Figura 5.41: Malla de la hélice cuadrifilar.

En la Figura 5.40 se muestra el modelo geométrico de la hélice, compuesta por 4 tiras que rotan a medida que suben por el eje Z disminuyendo su radio, hasta dar 2 vueltas completas. Además, estas tiras terminan en la parte superior con una tira muy pequeña cada una que sirve para alimentar la hélice con 1 voltio, variando la fase de cada tira 90° con respecto a sus adyacentes. Según este modelo, la placa plana que actúa como plano de masa es independiente a las hélices, por lo que no se analizaría correctamente al no haber continuidad eléctrica con ellas.

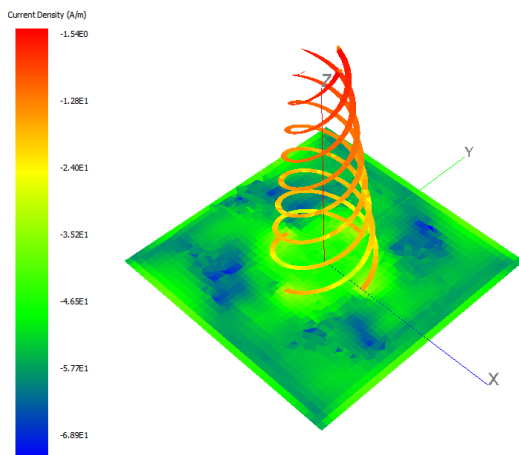


Figura 5.42: Densidad de corrientes en la hélice.

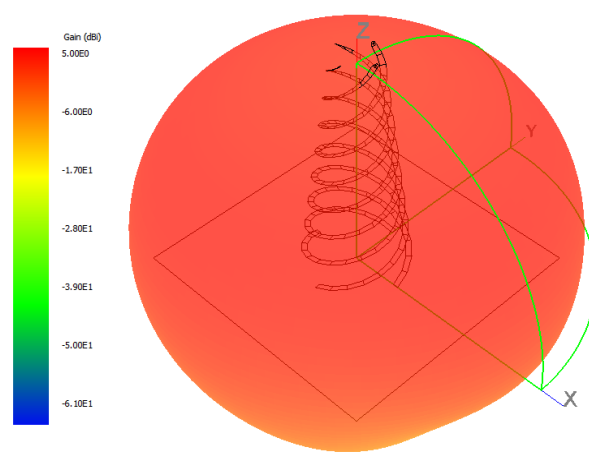


Figura 5.43: Diagrama de radiación de la hélice.

En la Figura 5.41 se muestra la malla de la antena, compuesta de 2.174 elementos, y en la que si que hay continuidad entre las hélices y el plano de masa, como se observa en los detalles aumentados de la figura.

La densidad de corrientes en la antena, representada en la Figura 5.42, disminuye gradualmente desde el extremo superior por el que se alimentan las tiras de la hélice hasta llegar al plano de masa. En el plano de masa, hay una distribución homogénea de densidad de corrientes, encontrándose valores más altos en las conexiones con las hélices, y zonas de sombra en los ángulos bisectores a las posiciones de las alimentaciones.

El diagrama de radiación de la antena, representado en la Figura 5.43, tiene la forma de una semiesfera en la parte superior del plano de masa, con valores aproximadamente constantes, y varios lóbulos de menor intensidad por debajo del mismo.

Como la antena se ha alimentado con polarización circular, son las componentes circulares las que interesa analizar en los diagramas de campo. La componente del campo eléctrico dominante es la de izquierdas, que como se observa en el diagrama de la Figura 5.44, tiene un valor casi constante en la parte superior del plano de masa, y el mínimo se encuentra debajo del mismo.

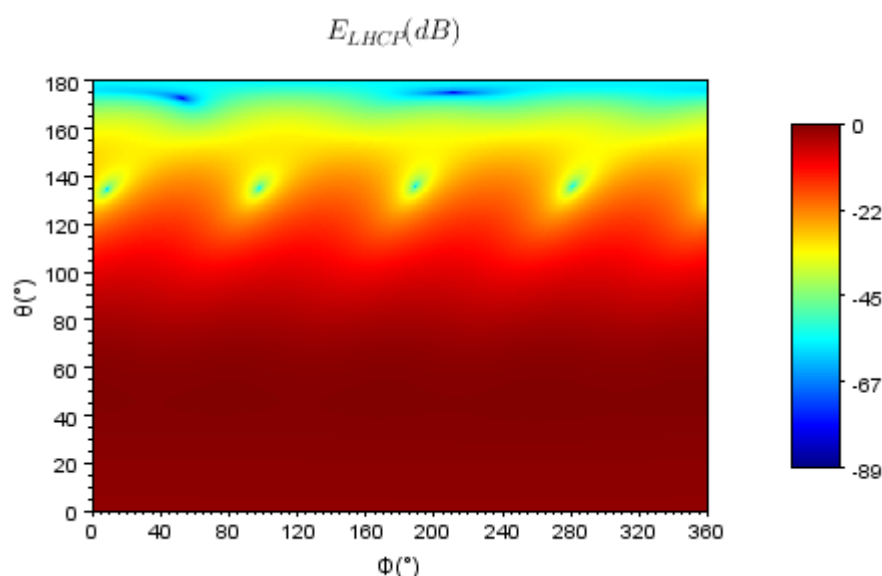


Figura 5.44: Diagrama de campo de E_{LHCP} de la hélice.

La componente a derechas del campo eléctrico, representada en la Figura 5.45, presenta un comportamiento prácticamente opuesto pero con niveles más bajos (es la componente cruzada), ya que se maximiza bajo el plano de masa, y es mínima por encima del mismo.

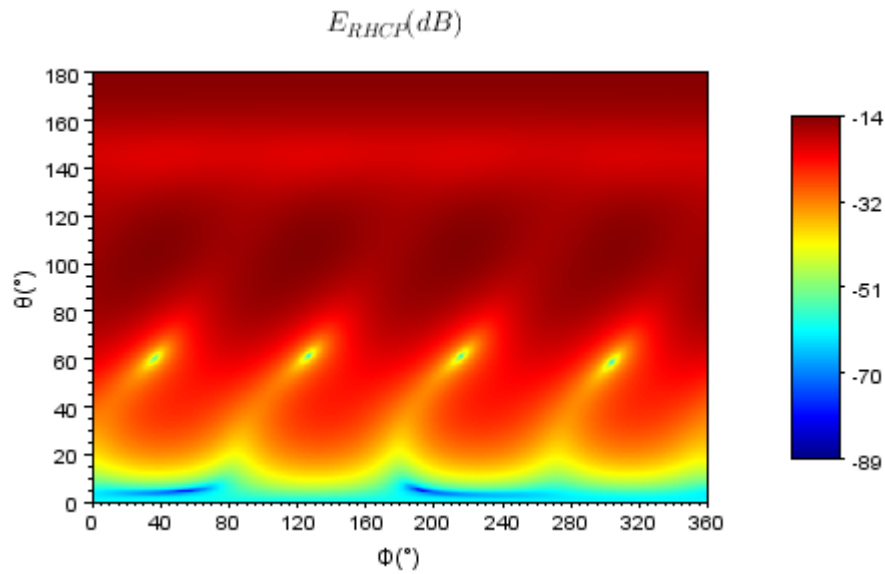


Figura 5.45: Diagrama de campo de E_{RHCP} de la hélice.

En la Figura 5.46 se muestra la ganancia total y la ganancia de cada componente lineal para el corte $\phi=0^{\circ}$.

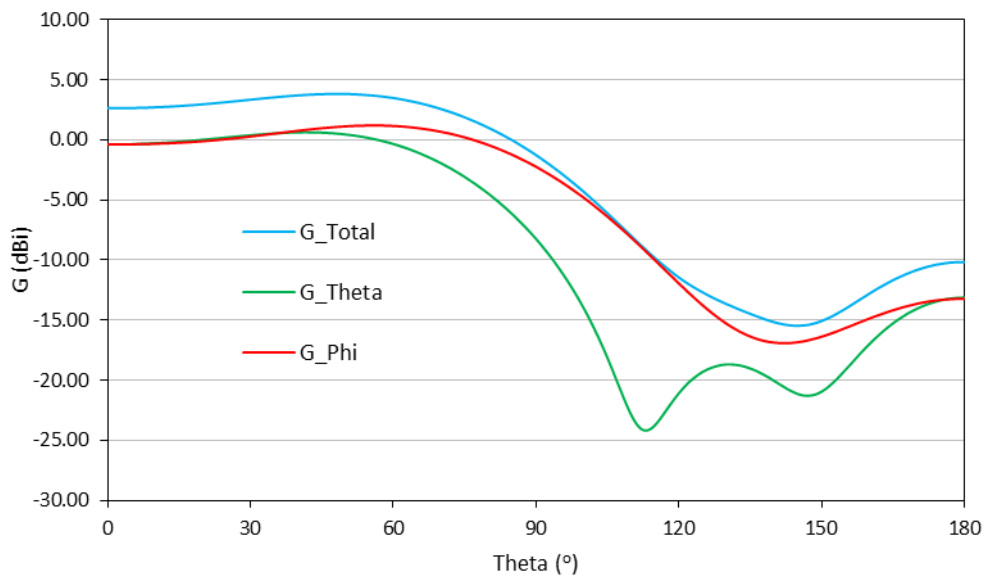


Figura 5.46: Corte en $\phi=0^{\circ}$ de la ganancia de la hélice cuadrifilar.

5.12. ANTENA BLADE

Otro caso para comprobar que se genera correctamente la continuidad de antenas modeladas mediante tiras, es el de una sencilla antena Blade [10] colocada sobre un plano de masa sin continuidad eléctrica.

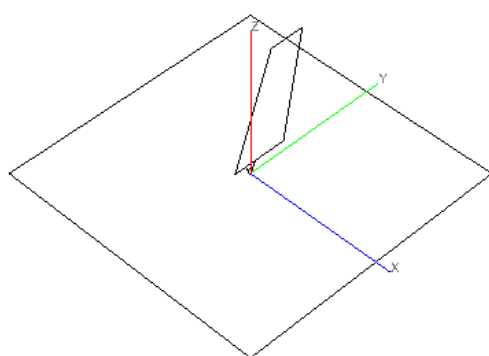


Figura 5.47: Antena Blade.

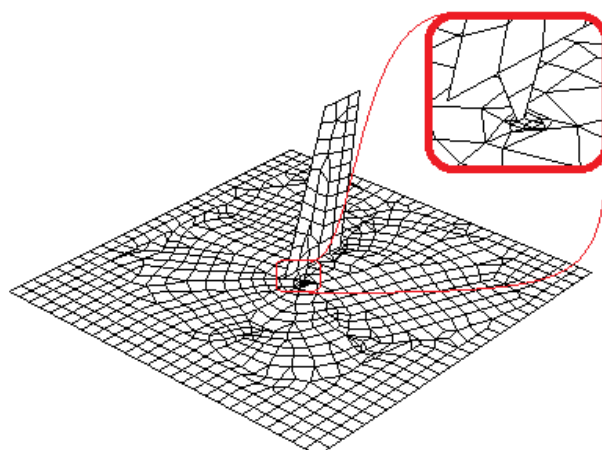


Figura 5.48: Malla de la antena Blande.

En la Figura 5.47 se muestra el modelo de la antena, compuesta por una superficie con forma de trapecioide que se toca con el plano de masa a través de dos pequeñas superficies trapecoidales, sin que exista realmente continuidad eléctrica entre el elemento infinitesimal de conexión de la antena y el plano de masa. La estructura se alimenta insertando 1 voltio entre el plano de masa y la superficie inferior de la antena.

En la Figura 5.48 se puede visualizar la malla resultante de la antena, compuesta de 844 elementos, y en la que se ha generado automáticamente la continuidad entre la estructura y el plano de masa, como se observa en los detalles aumentados de la figura.

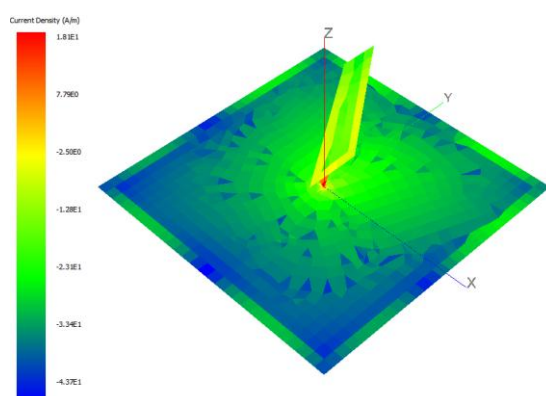


Figura 5.49: Densidad de corrientes en la antena Blade.

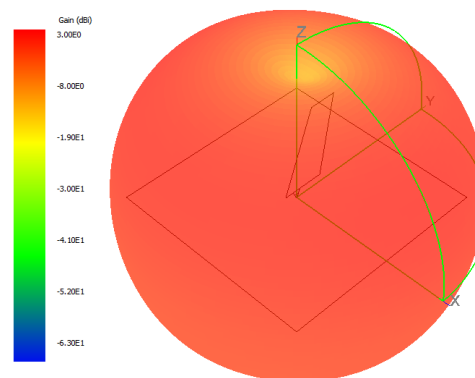


Figura 5.50: Diagrama de radiación de la antena Blade.

La densidad de corrientes en la antena, representada en la Figura 5.49, disminuye gradualmente con la distancia desde el punto donde se alimenta, con una intensidad ligeramente mayor en los contornos de la superficie superior de la antena.

El diagrama de radiación de la antena, mostrado en al Figura 5.50, presenta una forma suave, siendo aproximadamente constante en todas las direcciones excepto en el eje Z, donde se anula.

La componente según ϕ del campo eléctrico presenta dos claros mínimos sobre el eje Y , como se observa de la Figura 5.51. La componente según θ es la dominante en esta antena, ya que se maximiza aproximadamente en el eje $\theta=60^\circ$ y disminuye suavemente en el resto de las direcciones hasta minimizarse sobre el eje Z , como se puede ver en la Figura 5.52.

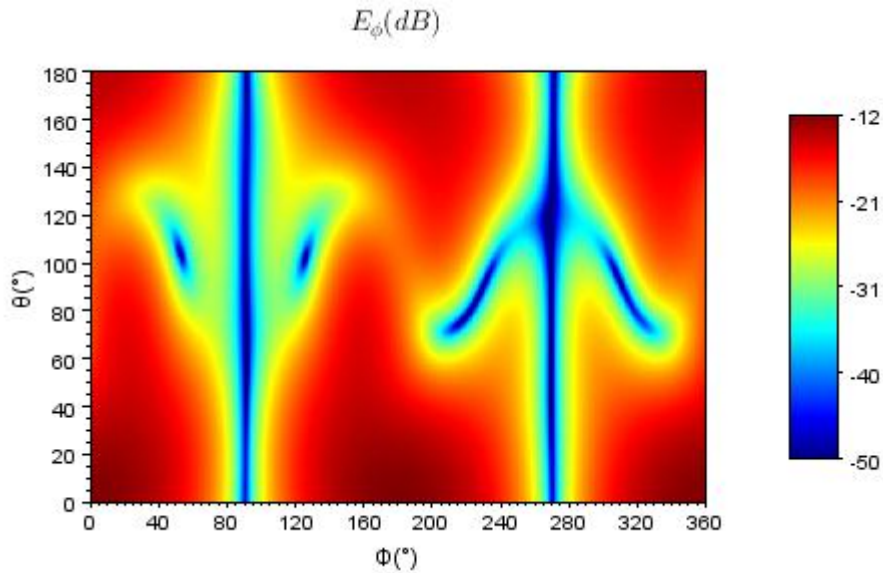


Figura 5.51: Diagrama de campo de E_ϕ de la antena Blade.

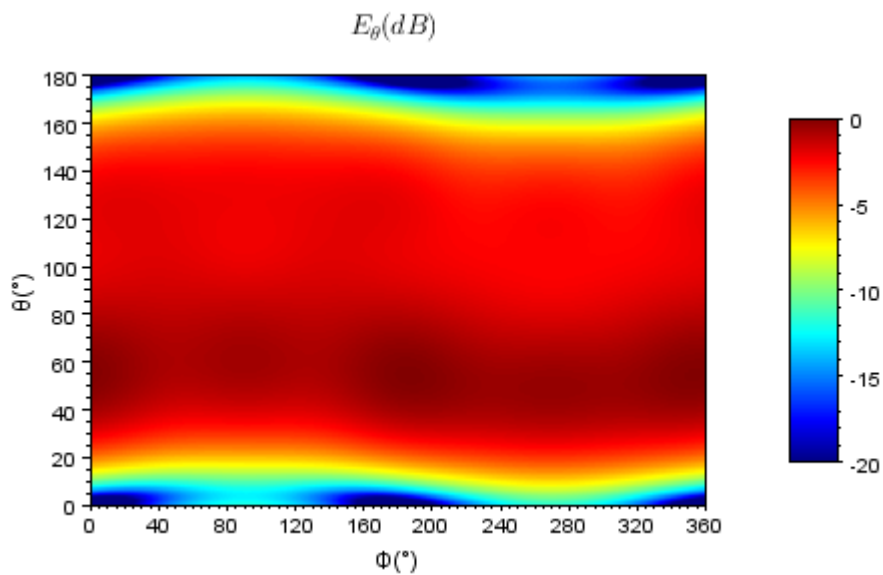


Figura 5.52: Diagrama de campo de E_θ de la antena Blade.

Para poder usar como referencia esta antena en la siguiente sección, se ha tomado como ejemplo el corte de la ganancia (total y por componentes) en $\phi=0^\circ$ representado en la Figura 5.53.

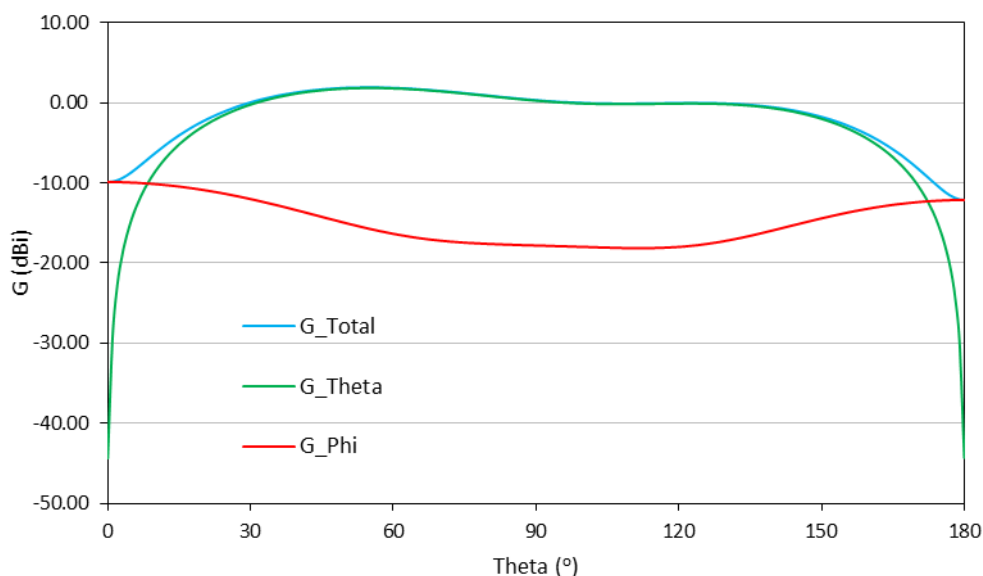


Figura 5.53: Corte en $\phi=0^\circ$ de la ganancia de la antena Blade.

5.13. VEHÍCULO

El último caso de análisis es un vehículo con el que se estudian la mayoría de aspectos considerados en esta tesis: tiempos de mallado, estadísticas de la geometría de entrada y de la malla de salida, y simulación de una antena colocada sobre el mismo.

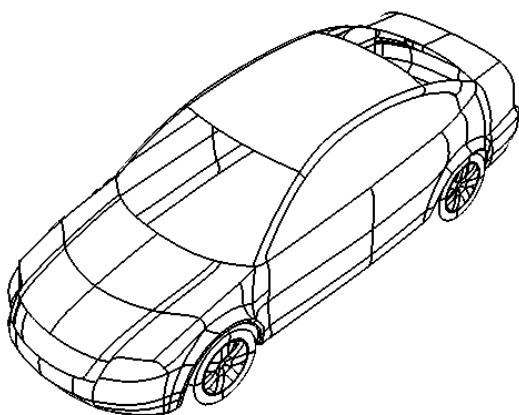


Figura 5.54: Vehículo.

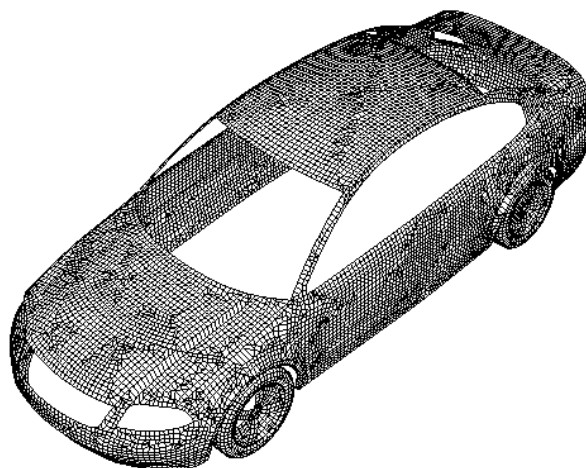


Figura 5.55: Malla del vehículo con baja resolución.

La geometría de original del vehículo, representada en la Figura 5.54, está compuesta por 363 superficies curvadas NURBS, algunas de ellas recortadas, de tamaños y formas muy diversos. El vehículo tiene un área útil total de $14,6 \text{ m}^2$. En la Figura 5.55 se muestra una malla de resolución media-baja del vehículo, compuesta por unos 67.000 elementos de 3 cm. de lado cada uno.

5.13.1. Análisis de tiempos de mallado

Para hacer un análisis exhaustivo, se han tomado medidas del tiempo de mallado del vehículo con un lado de elementos de 1,5 mm., consiguiendo un total de algo más de 6.500.000 elementos [11]. Para ello, se ha utilizado una máquina SUN X4000 Quad Opteron de 32 procesadores a 2,4 GHz., con 256 GB. de memoria RAM.

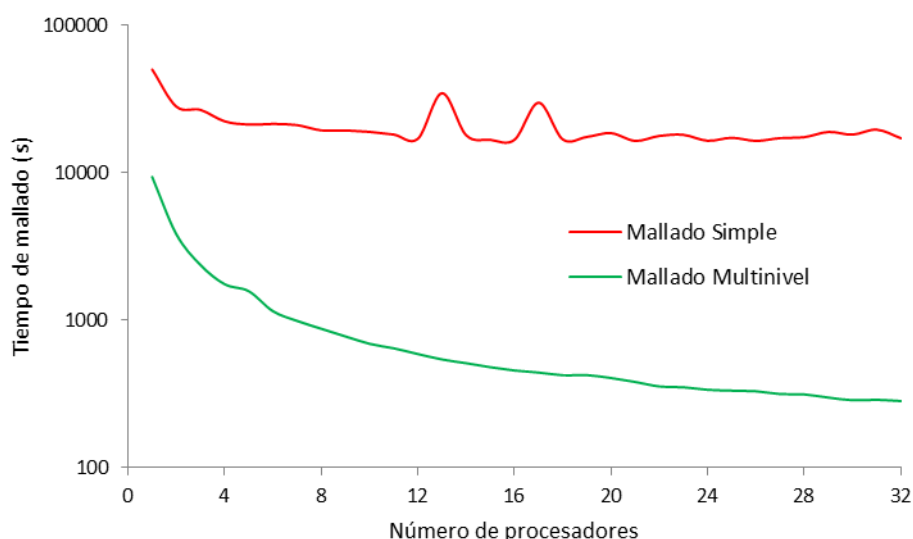


Figura 5.56: Tiempos de mallado frente al número de procesadores en el vehículo.

Variando el número de procesadores para mallar, y empleando o no el modo multinivel, se obtienen las dos curvas de tiempos representadas en la Figura 5.56. Cuando se malla con el algoritmo tradicional, se observa que la curva de tiempos tiene dos máximos locales al utilizar 13 y 17 procesadores, y además, pasa de tardar 14 horas con un procesador a 4,5 horas con 32 procesadores. Este comportamiento no es el esperado según lo visto hasta ahora, ya que la reducción de tiempos no es tan grande como en los casos previos, y el tiempo de mallado no siempre decrece con el número de procesadores. Esto se debe a la diversidad de tamaños en la geometría de entrada y al reparto de carga entre procesadores por áreas de superficies, ya que en ocasiones se le asignan superficies complejas a un mismo procesador que se acaba convirtiendo en el cuello de botella del proceso. Sin embargo, al utilizar el modo multinivel, la curva recupera el comportamiento decreciente esperado, observando que con un solo procesador se consigue el mallado en 2,5 horas, reduciéndolo a 5 minutos cuando se malla con 32 procesadores.

En la curva de la Figura 5.57, se representa la curva que relaciona los tiempos de mallado con multinivel entre los tiempos del mallado simple, observando que se ha conseguido reducir el tiempo al 19 por ciento con un procesador, y al 98 por ciento con 32.

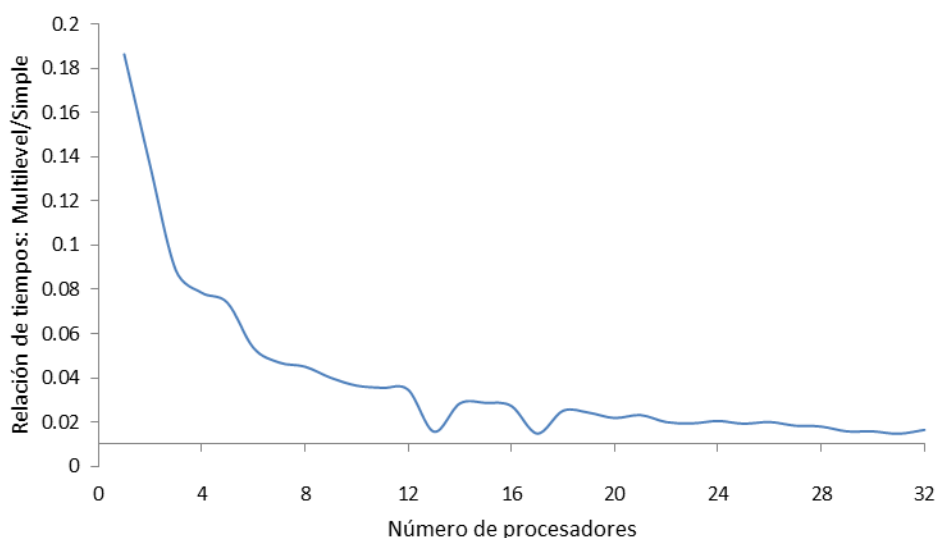


Figura 5.57: Relación de tiempos de mallado en el vehículo.

5.13.2. Estadísticas de la geometría

En esta sección, se analiza la geometría de entrada del vehículo para comprender la eficiencia del modo multinivel, y se comparan las mallas obtenidas en la sección anterior con sus estadísticas.

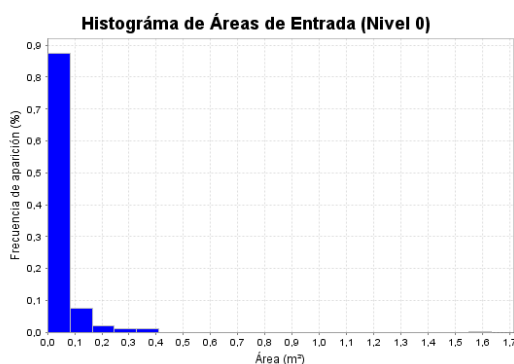


Figura 5.58: Áreas de entrada del vehículo.

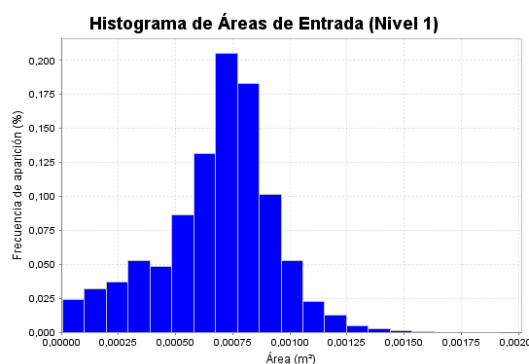


Figura 5.59: Áreas de entrada al segundo nivel del vehículo.

Comenzando con la geometría de entrada y según el diagrama de áreas de la Figura 5.58, se observa que está compuesta principalmente por superficies muy pequeñas, que generalmente se usan para los detalles de la estructura. También tiene algunas superficies de tamaño considerable que requieren cientos de miles de elementos, convirtiéndose en las causantes de los cuellos de botella. Sin embargo, analizando el diagrama de áreas de entrada del segundo nivel (los niveles se numeran desde 0) de la Figura 5.59, se observa que el contraste entre las dimensiones de las superficies es menor, lo cual garantiza un reparto de carga entre procesadores más equilibrado.

El área de un elemento cuadrado de 1,5 mm. de lado es $2,5 \text{ mm}^2$. Tanto en el diagrama de áreas de salida del algoritmo simple como en el de multinivel, representados en la Figura 5.60 y en la Figura 5.61 respectivamente, se observa la concentración de áreas en torno a ese valor. La diferencia en cuanto a la concentración de elementos se debe principalmente a los elementos que se deforman por motivo de las uniones resueltas.

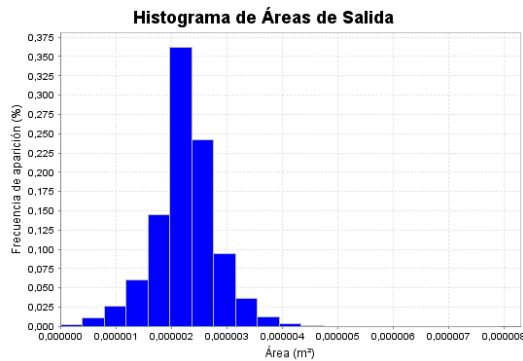


Figura 5.60: Áreas de salida del vehículo sin ML.

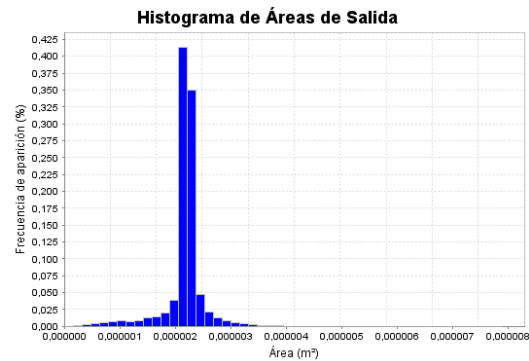


Figura 5.61: Áreas de salida del vehículo con ML.

Analizando las longitudes de los elementos cuadrangulares de salida en el mallado sin multinivel de la Figura 5.62 y con multinivel en la Figura 5.63, en ambos casos la mayoría de los bordes tiene una longitud de 1,5 mm., siendo incluso mayor la concentración del diagrama cuando se utiliza el modo multinivel, por lo que la calidad de la malla es válida igualmente.

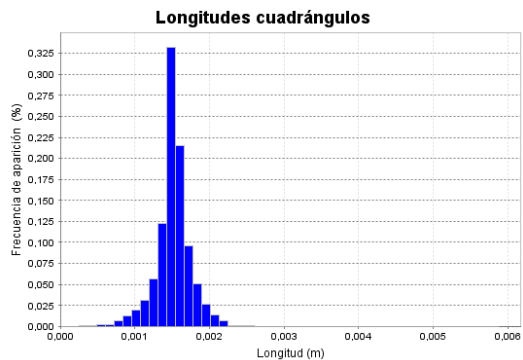


Figura 5.62: Longitudes de lado de los cuadrángulos en el vehículo sin ML.

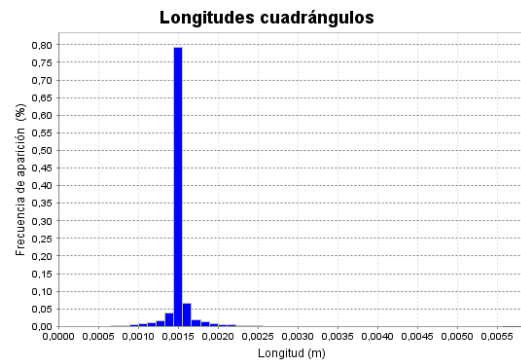


Figura 5.63: Longitudes de lado de los cuadrángulos en el vehículo con ML.

Al comparar las longitudes de los elementos triangulares sin o con multinivel de los diagramas de la Figura 5.64 y de la Figura 5.65 respectivamente, se observa que también se concentran cerca del tamaño deseado, aunque el máximo del diagrama tiene una frecuencia mucho menor y la transición hacia el mismo es suave. Este resultado es lógico, ya que al insertar triángulos únicamente cuando no hay una opción mejor, es probable que dos de sus lados tengan la longitud deseada l (por estar en contacto con elementos de buena calidad), y la longitud del tercer lado sea $\sqrt{2}l^2$ en el mejor caso, y algo más imprevisible en general.

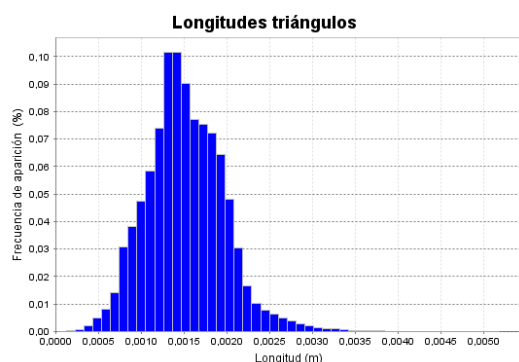


Figura 5.64: Longitudes de lado de los triángulos en el vehículo sin ML.

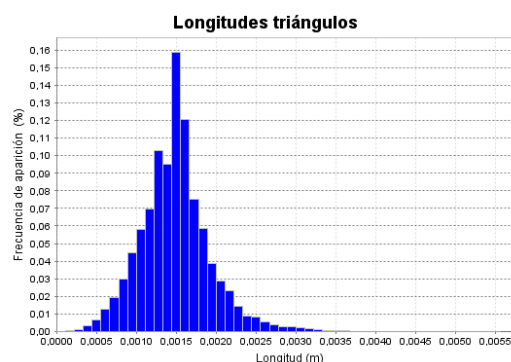


Figura 5.65: Longitudes de lado de los triángulos en el vehículo con ML.

Por otra parte, los ángulos de los elementos cuadrilaterales son en su mayoría de 90° o muy próximos a ellos, tanto en la malla generada en un solo nivel como en la generada en dos niveles, como se observa en los diagramas de la Figura 5.66 y la Figura 5.67, respectivamente.

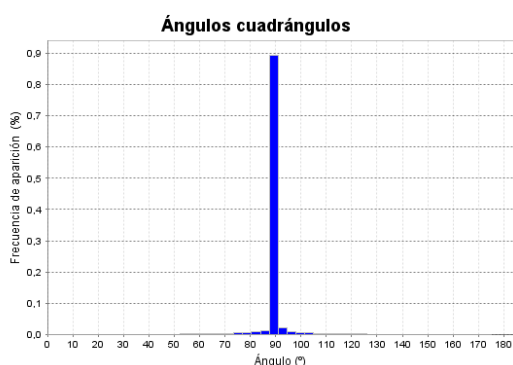


Figura 5.66: Ángulos internos de los cuadrángulos en el vehículo sin ML.

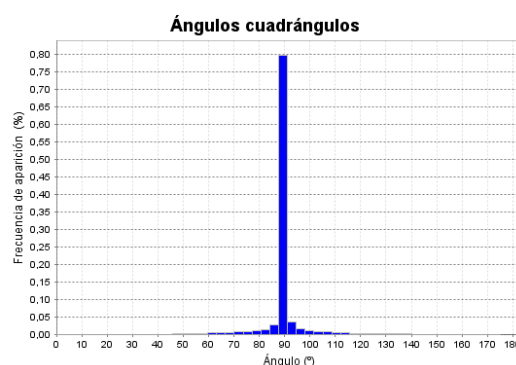


Figura 5.67: Ángulos internos de los cuadrángulos en el vehículo con ML.

Al igual que ocurría con las longitudes, los ángulos de los elementos triangulares varían con respecto a su situación ideal, ya que su forma es imprevisible. El ángulo en el que tienden a concentrarse los triángulos es entre 45° y 90° , como se muestra en la Figura 5.68 y en la Figura 5.69, para el mallado simple y el de multinivel, respectivamente.

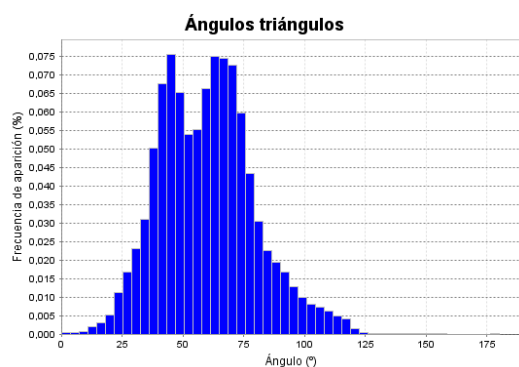


Figura 5.68: Ángulos internos de los triángulos en el vehículo sin ML.

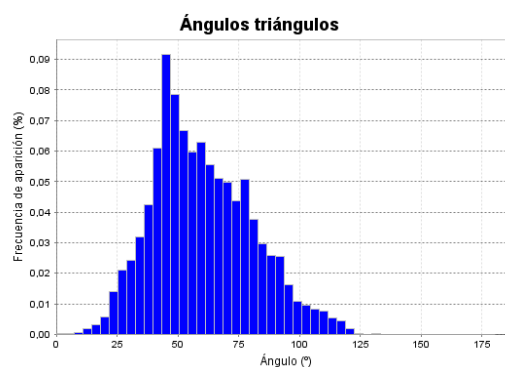


Figura 5.69: Ángulos internos de los triángulos en el vehículo con ML.

5.13.3. Análisis de antena embarcada

Para concluir con el vehículo, se ha colocado una antena Blade como la estudiada en la sección 5.12 para estudiar como varían sus parámetros de radiación al interactuar con los elementos del vehículo. La Figura 5.70 muestra la geometría resultante al colocar la antena, resaltada mediante un rectángulo rojo, sobre el techo del vehículo. La malla de toda la estructura, compuesta por unos 67.000 elementos, se muestra en la Figura 5.71.

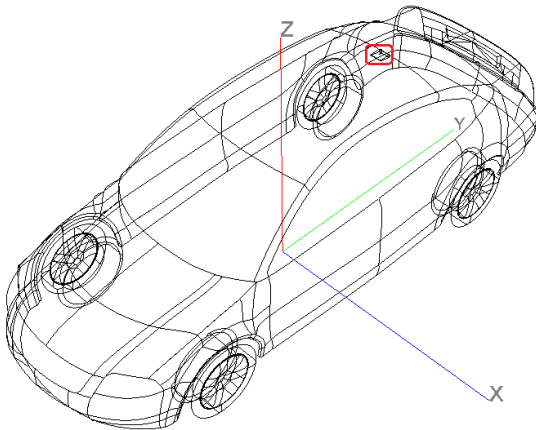


Figura 5.70: Vehículo con antena Blade.

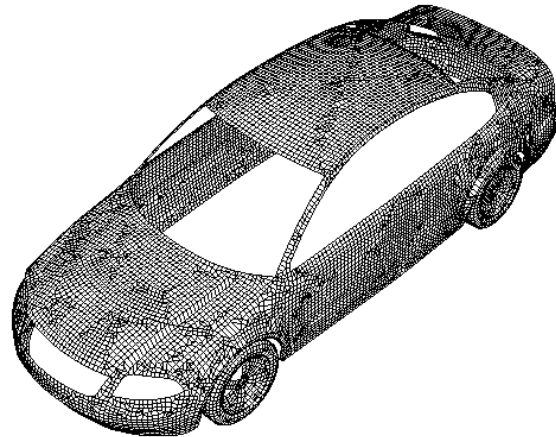


Figura 5.71: Malla del vehículo con antena Blade.

La distribución de corrientes en el vehículo, representada en la Figura 5.72, tiene su nivel máximo en la propia antena y disminuye a medida que aumenta la distancia con respecto a esta.

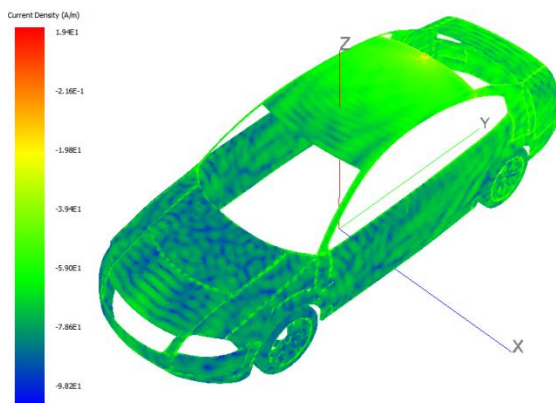


Figura 5.72: Densidad de corrientes en el vehículo con antena Blade.

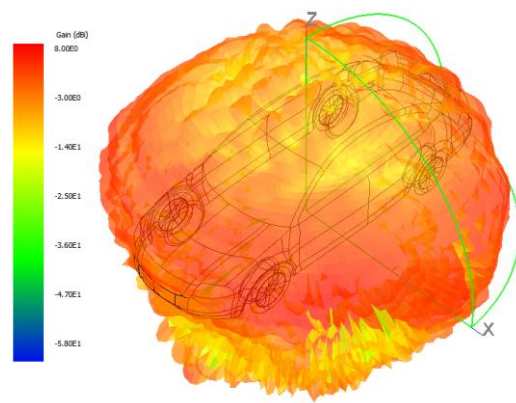


Figura 5.73: Diagrama de radiación del vehículo con antena Blade.

El diagrama de radiación, representado en la Figura 5.73, se puede relacionar con el de la antena original, observando que los niveles bajo el vehículo han disminuido considerablemente, ya que el techo del mismo supone para la antena un plano de masa mucho mayor que el que se utilizó para analizarla aisladamente. Además, la antena pierde la distribución homogénea al aparecer lóbulos debido a la interacción con la estructura.

Los pequeños lóbulos en el diagrama de radiación de la antena a causa de la geometría del vehículo se identifican con mayor claridad en los diagramas de campo por componentes. Así, en la Figura 5.74 para la componente en ϕ , y en la Figura 5.75 para la componente en θ , se observa que los mínimos y los máximos no son tan intensos como en el caso de la antena aislada, además de las oscilaciones en la intensidad del campo eléctrico.

Para comparar los resultados con respecto a la antena aislada, se ha representado un corte en $\phi=0^\circ$ de la ganancia (total y por componentes) en la Figura 5.76, en la que las curvas de líneas discontinuas se corresponden a la antena aislada y las de líneas continuas a la antena sobre el vehículo.

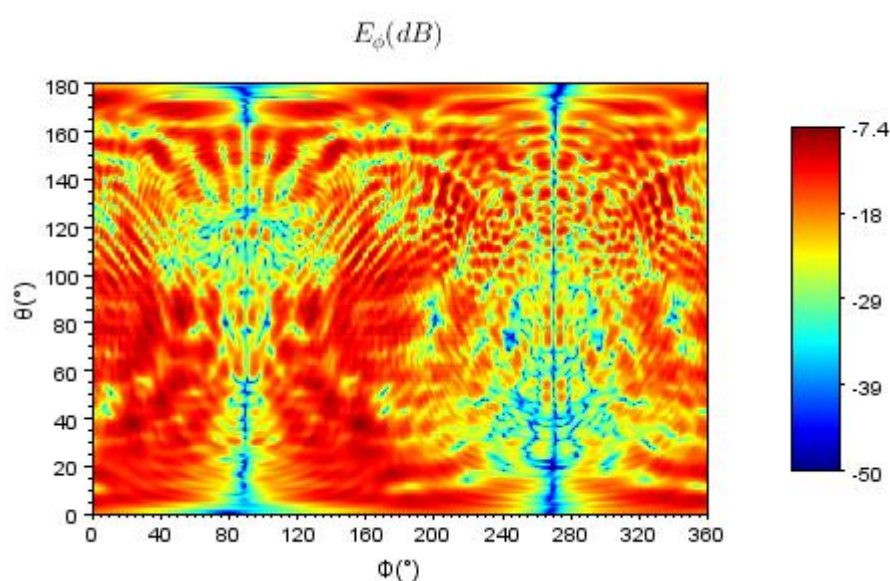


Figura 5.74: Diagrama de campo de E_ϕ del vehículo con antena Blade.

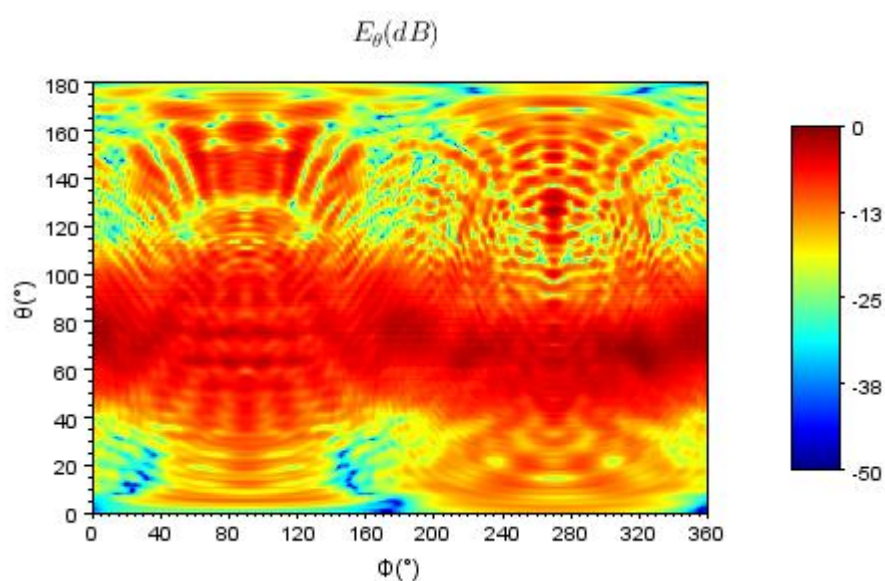


Figura 5.75: Diagrama de campo de E_θ del vehículo con antena Blade.

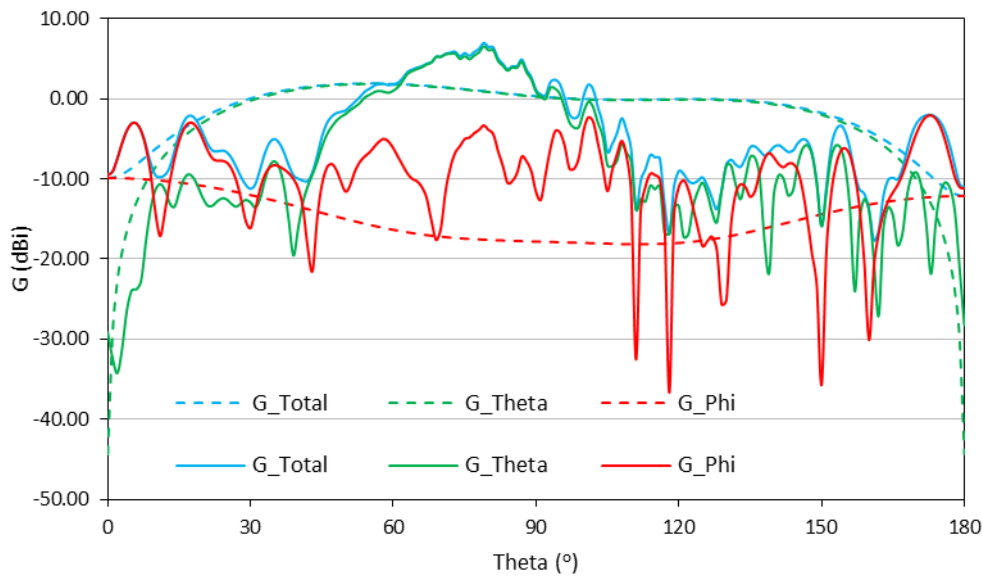


Figura 5.76: Corte en $\phi=0^\circ$ de la ganancia de la antena Blade en el vehículo.

5.14. REFERENCIAS

- [1] NewFasant, «NewFasant,» [En línea]. Disponible: <http://www.fasant.com/>. [Último acceso: Diciembre 2012].
- [2] R. J. Cass, S. E. Benzley, R. J. Meyers y T. D. Blacker, «Generalized 3D Paving: An automated quadrilateral surface mesh generation algorithm», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, nº 9, pp. 1475-1489, 1996.
- [3] The International Center for Numerical Methods in Engineering, «GiD,» CIMNE, [En línea]. Disponible: <http://gid.cimne.upc.es/>. [Último acceso: Julio 2012].
- [4] Sandia National Laboratories, «Cubit,» [En línea]. Disponible: <http://cubit.sandia.gov/>. [Último acceso: Julio 2012].
- [5] J. Moreno, M. J. Algar, L. Lozano y F. Cátedra, «A New Mesh Generator for the Antenna Scattering Analysis Using Computer Tools», *Proceedings of the 32nd Antenna Workshop on Antennas for Space Applications*, Noordwijk, The Netherlands, 2010.
- [6] A. C. Woo, H. T. G. Wang y M. J. Schuh, «Benchmark Radar Targets for the Validation of Computational Electromagnetics Programs», *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 35, nº 1, pp. 84-89, 1993.
- [7] J. Moreno, I. González, F. Cátedra y M. Macías, «Desarrollo de un Mallador de Elementos Cuadrangulares Curvos Paralelizado», *Libro de Actas del XXV Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI)*, Bilbao, España, 2010.
- [8] D. Brady, «The Design, Fabrication and Measurement of Microstrip Filter and Coupler Circuits», 2002 Summit Technical Media, LLC, 2002.
- [9] Agilent Technologies, Inc., [En línea]. Disponible: www.agilent.com. [Último acceso: Mayo 2012].
- [10] J. Gómez, J. Moreno, A. Tayebi y F. Cátedra, «Placement and Simulation of Antennas Attached to Large Platforms Modeled with Parametric Surfaces», *Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, Chicago, Illinois, USA, 2012.

- [11] J. Moreno, «Contribución a la Mejora de los Mallados sobre Superficies Paramétricas en Geometría Computacional», Alcalá de Henares, Madrid, España: Universidad de Alcalá, Trabajo Fin de Máster, 2011.

6. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

6.1. CONCLUSIONES

En esta tesis se ha presentado principalmente un algoritmo para mallar geometrías compuestas por superficies paramétricas, con la finalidad de simular las mallas resultantes con métodos de cálculo electromagnético, como son el Método de los Momentos (MoM) o la Óptica Física (PO). Para tal fin, se ha desarrollado un algoritmo basado en la técnica de *paving* o *enladrillado*, ya que genera mallas altamente estructuradas de elementos cuadrangulares generados desde las fronteras de las superficies originales, y permite reducir notablemente el número de incógnitas a analizar, optimizando así la convergencia de las simulaciones. Además, el uso de elementos conformados permite mantener la coherencia de la geometría de entrada y salida, ya que al trabajar internamente con superficies paramétricas, es posible representar con precisión los detalles originales, reduciendo la densidad de mallado que se requeriría para obtener los mismos resultados con mallas planas.

Los requisitos más importantes impuestos por el MoM son la continuidad eléctrica entre superficies en contacto y el no-solapamiento de elementos, para obtener resultados aceptables con una rápida convergencia. Como a priori, no se puede controlar el diseño del modelo geométrico de entrada, la herramienta trata de optimizar las características de la geometría a las especificaciones del método de análisis, para proporcionar una malla adecuada. Por ejemplo, se detectan las superficies que pueden estar en contacto (aunque el modelo no sea del todo correcto) con un cierto margen, y se evalúan los posibles solapamientos en la malla de salida. Estas etapas de pre y postprocesado aumentan la fiabilidad de la herramienta.

Una vez que el algoritmo de mallado proporciona mallas de buena calidad, el siguiente paso es optimizar la velocidad del mismo, ya que en cualquier análisis completo, los tiempos de mallado deben ser despreciables en comparación con los tiempos de simulación. Para ello, la combinación de una técnica común en cualquier herramienta actual como es la

paralelización con una técnica específica para la generación de mallas como es el modo multinivel, minimizan los tiempos requeridos para mallar geometrías complejas con un número muy alto de elementos.

La función para generar automáticamente la continuidad eléctrica en elementos radiantes modelados como tiras resulta de gran utilidad en el análisis de antenas embarcadas, ya que permite unir eléctricamente antenas físicas a objetos complejos con formas arbitrarias de forma automática. Con esto, se reducen las especificaciones de modelado geométrico para el usuario, y se garantiza la continuidad eléctrica en toda la estructura. Lo mismo ocurre con el análisis de circuitos impresos, ya que la identificación automática de la forma de los mismos flexibiliza el diseño del modelo geométrico de entrada para el usuario, y asegura el correcto modelado de las corrientes por efecto borde en la estructura. Estas dos funcionalidades están basadas en la búsqueda de puntos comunes entre superficies, y el uso de técnicas de aceleración minimiza los tiempos necesarios para aplicarlas.

La versión del mallador superficial implementada se ha verificado con éxito comparando resultados con respecto a las mallas procedentes de otras herramientas comerciales. Tras la verificación con múltiples métodos y casos de análisis, se ha incorporado finalmente como núcleo de mallado a la herramienta comercial NewFasant. En este trabajo, también se ha comprobado la influencia de las especificaciones de mallado sobre los resultados obtenidos de algunas simulaciones.

Por último, mencionar que aunque la primera versión de la técnica de mallado volumétrico se ha explicado en este trabajo, todavía no ha sido verificada con los núcleos de cálculo electromagnético. Es por esto que el algoritmo se clasifica como una versión de prueba, y no se han incluido resultados de recursos o simulaciones en esta tesis. No obstante, los mallados resultantes de las pruebas realizadas hasta la fecha parecen tener características incluso mejores que las de mallado superficial, con el inconveniente de requerir una resolución de elementos importante cuando el nivel de detalle en el modelo geométrico de entrada es alto.

6.2. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

A lo largo de este trabajo, han surgido una serie de ideas o mejoras que se proponen para ser resueltas, tanto a corto como a largo plazo.

El limpiado de la calidad de la malla es una tarea que puede resultar de gran interés, ya que las mejoras en esta etapa pueden traducirse en reducciones importantes de tiempo de convergencia cuando se aplica el MoM. Los principales inconvenientes vistos hasta ahora es la aparición de más triángulos de los deseados, o la concentración de los mismos en áreas próximas que se caracterizan por tener un alto número de nodos irregulares, situación que interesa evitar siempre que sea posible.

El MoM permite analizar los objetos cerrados con una formulación diferente a los objetos abiertos, consiguiendo así una convergencia más rápida y los mismos resultados. Podría ser eficiente modelar los objetos abiertos con dos capas paralelas, lo suficientemente cercanas como para poder considerarlos como cerrados, y así emplear la formulación de objetos cerrados. Para evitar esta tarea de modelado en las geometrías de entrada y tener una técnica automática, la mejor solución sería hacer una identificación automática de los objetos cerrados o abiertos de la geometría de entrada antes de mallar. Conociendo cuales son los objetos abiertos de la geometría, sería inmediato generar la capa de mallado paralela a estos, que permita utilizar la formulación de objetos cerrados.

La optimización de la herramienta para reducir más los tiempos de mallado es otra de las cosas que se podría realizar a corto plazo. Aunque esto se ha conseguido con la paralelización y el modo multinivel, es posible minimizarlos haciendo un análisis minucioso para identificar las etapas que consumen más tiempo del necesario, como puede ser: evitar operaciones redundantes, almacenando para ello datos temporales en memoria; usar de técnicas de aceleración siempre que sea posible, etc. La adaptación del programa al uso de Unidades de Procesamiento Gráfico (*Graphics Processing Unit*, GPU) tras la “depuración” de la herramienta, es el último objetivo pendiente para minimizar los tiempos requeridos y así poder generar cientos de millones de elementos en pocos minutos.

La función de mallado volumétrico es la que presenta un abanico de posibilidades de futuro trabajo mucho mayor, ya que aunque todavía no se ha testado con simulaciones, se conocen a priori sus principales limitaciones. Siempre que haya aristas vivas en el volumen a mallar, es posible que dichas aristas no queden reflejadas correctamente en la malla de salida, debido a que la proyección del algoritmo propuesto busca únicamente puntos sobre el volumen, y no tienen en cuenta la proximidad a estas aristas.

Además, el mallado volumétrico está orientado al análisis de volúmenes cuyo espesor es considerablemente mayor que el tamaño deseado de los hexaedros generados. Con esta técnica, por ejemplo, sería necesaria una alta resolución de elementos para mallar un reflector

con un espesor muy pequeño. Una amplia línea de trabajo sería la adaptación del algoritmo propuesto a cualquier tipo de geometrías, independientemente de las formas y espesores que tenga, o el desarrollo de un algoritmo más polivalente.

7. THESIS CONCLUSIONS AND SUGGESTIONS FOR FUTURE RESEARCH

7.1. THESIS CONCLUSIONS

In this thesis an algorithm for meshing geometries composed of parametric surfaces has been presented, which generates mainly superficial meshes, with the purpose of simulating the resulting meshes with electromagnetic computing methods, such as *Method of Moments* (MoM) or *Physical Optics* (PO). With this aim, an algorithm has been developed based on the *Paving* technique, generating highly structured meshes of quadrangular elements. These elements are inserted from the boundaries of the original surfaces, and allow reducing notably the number of unknowns to be analysed and the CPU time to obtain the solutions. Furthermore, the use of body-fitted elements allows that the output meshes are conformed to the input geometries. The internal modelling is done with parametric surfaces, so it is possible to represent accurately the original details, reducing the mesh density that would be required to obtain the same results with planar meshes.

Most important requirements imposed by the MoM are the electrical continuity between neighbouring connected surfaces and the elements non-overlapping, to obtain accurate results with a fast convergence. As it is not possible to control the design of the input geometric model from the earlier stages, the developed tool tries to optimize the characteristics of the geometry to the analysis method requirements, to provide it with a suitable mesh. For example, surfaces that can be in contact with others are detected (although the model is not good enough) with certain margin, and it is possible to check the elements overlapping in the mesh. This pre and postprocessing stages increase the reliability of the tool.

Once the meshing algorithm provides high quality meshes, next step is to optimize its speed: meshing CPU times must be insignificant in comparison with the simulation times. To do that, the combination of a parallelization technique like MPI with a specific method of mesh generation like the multilevel mode, minimizes the CPU time required to mesh complex geometries with a very high number of elements.

The function to set automatically the electrical continuity in radiating elements modelled with strips is really useful in the analysis of antennas on board, as it allows joining electrically physical antennas on complex objects of arbitrary shapes automatically. With this option, modelling requirements are simpler for the user, and electrical continuity is guaranteed in the whole structure. The same effect occurs with the analysis of printed circuits, as the automatic identification of their shapes make the design of the input geometric models more flexible for the user, and it ensures the correct computing of currents due to the edge effect in the structure. These two functionalities are based on the search of common points between surfaces, and the using of accelerating techniques that minimizes the CPU time required to apply them.

The implemented version of the superficial mesh generator has been successfully verified comparing results with meshes obtained with other commercial tools. After the verification with multiple methods and test cases, it has been finally incorporated in the commercial tool NewFasant as the mesh generation kernel. In this thesis, the influence of meshing requirements over results obtained in some simulations has also been tested.

Lastly, it is necessary to mention that although the first version of the technique for volumetric mesh generation has been detailed in this project, it has not been verified with the electromagnetic simulation kernels yet. This is the reason why the algorithm is marked as a beta version, and resources requirements or simulation results are not included in this thesis. Nevertheless, the resulting meshes of the test performed to date seems to achieve features even better than the superficial mesh algorithm, with the disadvantage of requiring an important elements resolution when the detail level of the input geometry model is too much high.

7.2. SUGGESTIONS FOR FUTURE RESEARCH

During the evolution of this thesis, a set of new ideas or improvements have arisen and are proposed to be solved in this section, both in the short term as in the long term.

The mesh quality clean-up is a task that can be especially interesting, as the improvements of this stage are translated as important convergence time reductions when the MoM is applied. The main disadvantages found are the appearance of more triangular

elements than desired or the concentration of them in near areas that are characterized by having a high number of irregular nodes, situation that must be as much as possible avoidable.

The MoM allows analysing closed objects with a different mathematic formulation than open objects, thereby achieving a faster convergence and the same results. Modelling open objects with two parallel layers with a separation between layers small enough to consider them as closed objects may be efficient, and then to be able to use the closed objects formulation. To avoid this requirement in the input geometries modelling and get an automatic technique, the best solution would be to identify automatically in the input geometries which are the open or closed objects before meshing. Thereby knowing which objects of the geometries are open, generating their parallel layer that permits to use the closed objects formulation would be an immediate step.

The optimization of the tool to decrease even more the required meshing times is another task that may be done in the short term. Although it has been achieved with the parallelization and the multilevel mode, it is possible to minimize the meshing CPU times carrying out a meticulous analysis to identify the heaviest stages in terms of CPU time requirements, such as: avoiding redundant operations, keeping in memory some temporal information; using acceleration techniques as frequently as possible; etc. Adaptation of the program to the use of *Graphics Processing Units* (GPU) after the tool “debugging” is the last left aim to minimize the meshing times and then to be able to generate hundreds of millions of elements in a few minutes.

The volumetric meshing algorithm has a much wider range of options, as although it has not been tested with simulations yet, a priori it is known its main limitations. Whenever there are pure edges in the volume to be meshed, it is possible that those edges are not correctly represented in the output meshes, due to the proposed projection algorithm only searches points on the volumes, and the proximity of the points to the edges is not taken into account.

Furthermore, the volumetric meshing algorithm is oriented to the analysis of volumes of thickness bigger than the desired size of the generated hexahedrons. With this technique, for example, a high elements resolution would be required to mesh a small thickness reflector. A wide range of work would be the adaptation of the proposed algorithm to any type of geometries, independently of their shapes and thicknesses, or the development of a more flexible volumetric mesh generation algorithm.

